

37. 2

Theoretische Abhandlung
über die
FLUGBAHN DER GESCHOSSE.

Nebst einem Anhang,
enthaltend
verschiedene dem Artillerieoffizier unentbehrliche
mathematische Notizen.

Von
L. Denzler,
Oberstlieutenant im eidgenössischen Artilleriestab, Oberinstruktor
der Artillerie an der eidgenössischen Militärschule etc.

MIT 25 GEOM. FIGUREN.

Zürich,
bei Orell, Füssli & Comp.
1845.

App. Nil.
B. 3h

Denzler

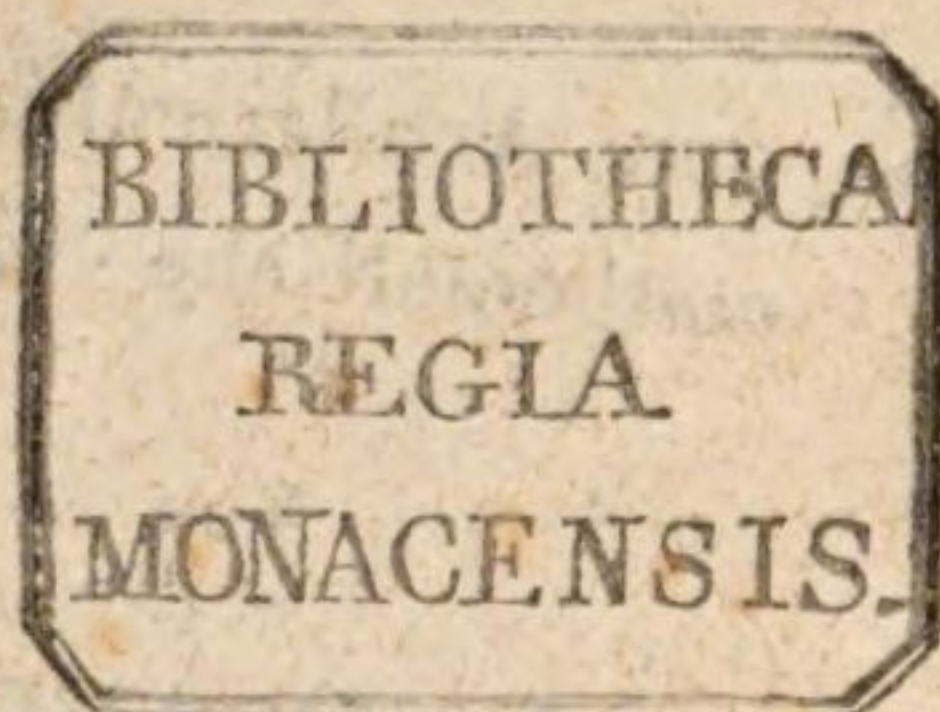
Theoretische Abhandlung
über die
FLUGBAHN DER GESCHOSSE.

Nebst einem Anhang,
enthaltend
verschiedene dem Artillerieoffizier unentbehrliche
mathematische Notizen.

Von
L. Denzler,
Oberstlieutenant im eidgenössischen Artilleriestab, Oberinstruktor der
Artillerie an der eidgenössischen Militärschule etc.

MIT 25 GEOM. FIGUREN.

Zürich,
bei Orell, Füssli & Comp.
1845.



Vorwort.

Die in wissenschaftlicher Beziehung vermehrten Anforderungen, welche gegenwärtig an die Offiziere der schweizerischen Artillerie gemacht werden, veranlassen mich diese Blätter, die eigentlich nur mir als Leitfaden zu Vorlesungen in der eidgenössischen Militärschule dienen sollten, zu veröffentlichen. Sie enthalten das Wesentlichste alles dessen, was von den geachtetesten Schriftstellern über die Flugbahn der Geschosse geschrieben worden ist, und erfordern, um gehörig verstanden zu werden, nur diejenigen mathematischen Kenntnisse, welche von Offizieren dieser Waffe zu verlangen sind.

Ich theilte diese theoretische Untersuchung der Bahn der Geschosse in vier Abschnitte, von denen der erste von der Bewegung der Körper im Allgemeinen, der zweite von der Flugbahn der Geschosse im Allgemeinen, der dritte von

der Flugbahn der Geschosse im luftleeren Raume, der vierte endlich von der Flugbahn der Geschosse im luftgefüllten Raume handelt.

Der hierauf folgende Anhang, enthaltend verschiedene dem Artillerieoffizier unentbehrliche mathematische Notizen, dürfte vielen meiner Waffengenossen um so willkommener sein, als schon seit langem das Bedürfniss einer solchen nicht zu voluminösen Gedächtnishülfe allseitig gefühlt wurde.

Ich hoffe, dass durch das Erscheinen dieses artillerie-wissenschaftlichen Bruchstücks, eine bisher hie und da empfundene Lücke ausgefüllt, und damit manchem jüngern Offizier ein hinreichendes Mittel dargeboten sei, um sich in diesem wichtigen Theil der Artillerielehre die nöthigen Kenntnisse zu verschaffen.

Vielleicht wird später diesem Hefte ein zweites enthaltend: die Geschützrichtungsschule und die Wirkung der Geschosse nachfolgen, um sodann aus beiden ein Ganzes unter dem Titel: „Abhandlungen über die Bahn und die Wirkung der Geschosse“, — zu bilden. —

Zürich, den 20. September 1844.

Verzeichniss

der vorzüglichsten Werke, welche bei der Bearbeitung dieser «theoretischen Abhandlung über die Flugbahn der Geschosse» benutzt worden sind.

Bezout, cours de mathématiques.

Bonaparte, (Napoléon Louis) manuel d'Artillerie.

Borkenstein's Artilleriewissenschaft.

Gassendi, aide-mémoire à l'usage des officiers d'Artillerie.

Leonhardi's Mechanik.

Lombard, traité du mouvement des projectiles.

Neumann's Handbuch der Physik,

Pabst's Gebrauch der Geschütze.

Peschels, Waffenlehre.

Piobert, traité d'Artillerie.

Rouvroy's Vorlesungen über die Artillerie.

Scharnhorst's, Handbuch der Artillerie.

Sinner's Lehrbuch der Ballistik.

Smola's Handbuch für K. Königl. Oestreichische Artillerieoffiziere.

Timmerhans, essai d'un traité d'Artillerie.

Erster Abschnitt.

Von der Bewegung der Körper im Allgemeinen.

Bei einer jeden Bewegung kommt in Betracht: der Weg, — die Richtung der Bewegung, — die Zeit, — die Geschwindigkeit, — die bewegenden Kräfte, — und die Grösse der Bewegung.

Der Weg oder die Bahn ist der Raum, den das Bewegliche nach und nach durchgeht. Man nennt ihn auch den beschriebenen Raum. Er wird gebildet durch die Reihe der Oerter, die das Bewegliche bei der Bewegung nach und nach einnimmt. Man bezeichnet ihn durch eine Linie, weil hier nur eine Dimension zu messen ist.

Die Richtung nennt man eine gerade Linie, die von dem Orte des Beweglichen nach einem Punkte gezogen wird, nach welchem hin das Bewegliche in diesem Augenblicke zu gehen das Bestreben hat. — In Beziehung auf die Richtung ist die Bewegung entweder geradlinig, bei welcher das Bewegliche immer dieselbe Richtung beibehält, also eine gerade Linie als seinen Weg

beschreibt; oder sie ist krummlinig, bei welcher das Bewegliche in einer krummen Linie fortgeht, seine Richtung also in jedem Augenblicke ändert.

Das Bewegliche kann nicht in zwei verschiedenen Punkten seiner Bahn zugleich sein. Es ist demnach eine Zeit nöthig, während der es aus dem einen Punkte in den andern kommt. Diese Zeit wird nach regelmässig sich wiederholenden Erscheinungen bestimmt, deren Einheit die Sekunde ist.

Wenn man den von einem Beweglichen zurückgelegten Weg, und die zur Zurücklegung desselben nöthige Zeit zusammendenkt, so entsteht der Begriff der Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit wird daher auch das Verhältniss des beschriebenen Raumes, zu der dazu verwendeten Zeit genannt. Das Maass der Geschwindigkeit ist demnach der in einer bestimmten Zeit zurückgelegte Weg. Um zu sagen wie geschwind ein Körper sich bewegt, muss beides Weg und Zeit angegeben werden. Wenn z. B. ein Körper in 5 Sekunden 1000 Schritt zurücklegt, so sagt man, seine Geschwindigkeit sei $200 \text{ Schritt} = 500 \text{ Fuss}$, — oder die Geschwindigkeit eines Körpers (d. h. der in einer Sekunde durchlaufene Weg) wird gefunden: wenn man den Zahlausdruck des durchlaufenen Weges, durch den Zahlausdruck der hierzu verwendeten Zeit dividirt.

Es bezeichne g die Geschwindigkeit, d. h. den in der Zeiteinheit durchlaufenen Weg, t die Zeit der Bewegung, d. h. eine gewisse Menge von Zeit-

einheiten, v den während der ganzen Zeit t zurückgelegten Weg, so ist $g = \frac{v}{t}$. Hieraus ergibt sich die Bestimmung jeder der folgenden Grössen, nämlich des Weges und der Bewegungszeit eines Körpers.

Der Weg wird gefunden: wenn man die Geschwindigkeit mit der Zeit multipliziert, $v = g t$.

Die Zeit wird gefunden, wenn der durchlaufene Weg durch die Geschwindigkeit dividirt wird, $t = \frac{v}{g}$.

Die Winkelgeschwindigkeit eines Körpers ist nicht zu verwechseln mit der eigentlichen Geschwindigkeit, die man zum Unterschiede von der Winkelgeschwindigkeit die lineare nennt. Die Winkelgeschwindigkeit gilt nämlich von einem in einer Kreislinie bewegten Körper, und wird bestimmt durch die Grösse des Bogens den der Körper in einer bestimmten Zeit durchläuft. Bewegen sich nun (Fig. I.) zwei Körper a und b in zwei verschiedenen Kreisen, so sind ihre Winkelgeschwindigkeiten zwar gleich, weil die durchlaufenen Bogen gleich viele Grade haben; die linearen oder eigentlichen Geschwindigkeiten aber verschieden, weil a ein grösserer Weg als b b. Die lineare Geschwindigkeit ist daher bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit desto grösser, je grösser der Halbmesser des Kreises ist. Nur in einem bestimmten Kreise, ist die lineare Geschwindigkeit desto grösser, je grösser die Winkelgeschwindigkeit ist.

In Bezug auf die Geschwindigkeit ist eine Bewegung entweder gleichmässig oder ungleichmässig. Die gleichmässige oder gleichförmige Bewegung ist diejenige, bei der die Geschwindigkeit immer dieselbe bleibt, so dass das Bewegliche in gleichen Zeiten gleiche Räume zurücklegt. Die ungleichmässige oder ungleichförmige Bewegung ist diejenige, bei welcher die Geschwindigkeit nicht dieselbe bleibt, sondern entweder zunimmt oder abnimmt. Im ersten Fall heisst die ungleichförmige Bewegung beschleunigt, im zweiten Fall verzögert. Die beschleunigte Bewegung kann wieder zweierlei sein: entweder gleichförmig beschleunigt, wenn nämlich die Geschwindigkeit so zunimmt wie die Zeit; oder ungleichförmig beschleunigt, wenn die Geschwindigkeit in einem andern Verhältnisse zunimmt, so dass sie z. B. am Ende der 2^{ten} Sekunde nicht genau doppelt so gross ist als am Ende der ersten, sondern mehr oder auch weniger als doppelt so gross; eben so am Ende der dritten nicht genau dreimal so gross. — Dasselbe gilt auch von der verzögerten Bewegung. Diese kann ebenfalls gleichmässig verzögert sein, wenn nämlich die Abnahme der Geschwindigkeiten, den Zeiten verhältnissmässig sind; oder ungleichförmig verzögert, wenn diese genaue Verhältnissmässigkeit nicht Statt findet.

Man kann von der Geschwindigkeit nur bei der gleichförmigen Bewegung eine deutliche Vorstel-

lung haben. Nur hier wird sie durch einen in bestimmter Zeit zurückgelegten Raum gemessen. Bei der ungleichförmigen Bewegung, kann der wirklich beschriebene Raum dieses Maass nicht abgeben, weil bei dieser Bewegung die Geschwindigkeit nie dieselbe bleibt. Hier bedeutet die Geschwindigkeit für jeden Augenblick, nur das Streben des Beweglichen, einen gewissen Raum in einer bestimmten Zeit zurückzulegen; allein in dem nächsten Augenblicke ist dieses Bestreben schon anders. — Um die Geschwindigkeit bei der ungleichförmigen Bewegung anzugeben, muss sie daher auf eine gleichförmige Bewegung bezogen werden.

Die Bewegung ist eine Veränderung; die Ursachen der Veränderungen nennt man Kräfte. Zu jeder Entstehung der Bewegung und zu jeder Aenderung derselben, wird demnach die Wirkung einer Kraft nöthig sein. Hierauf gründet sich das sogenannte Beharrungsgesetz: jeder Körper behält seinen bestimmten Zustand der Ruhe oder der Bewegung so lange, bis er durch irgend eine Ursache veranlasst wird, ihn zu ändern. Hieraus ergiebt sich: dass jede Veränderung als die Wirkung irgend einer Ursache angesehen werden muss. Es lässt sich nicht einsehen, wie ein ruhender Körper ohne Grund in Bewegung übergehen, oder ein bewegter ohne Grund etwas in seiner Bewegung ändern sollte. Aendert sich nichts, so bleibt die Bewegung in Bezug auf

ihre Geschwindigkeit und Richtung dieselbe, und ist demnach gleichmässig und geradlinig.

In Beziehung auf die Kräfte ist die Bewegung einfach, wenn sie von einer Kraft bewirkt wird: oder sie ist zusammengesetzt, wenn sie das Resultat mehrerer auf das Bewegliche zu gleicher Zeit wirkenden Kräfte ist.

Die Grösse der Bewegung ist eigentlich die Bewegung selbst, insofern sie als eine vergleichbare Grösse angesehen wird.

Zu der gleichförmigen Bewegung wird eine Kraft erfordert, die, nachdem sie dem Körper eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt hat, zu wirken aufhört, denn nun geht dieser Körper nach dem Beharrungsgesetze mit dieser Geschwindigkeit fort; wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass kein Widerstand der Bewegung des Körpers entgegenwirkt. In der Wirklichkeit finden sich aber immer Widerstände, daher die Bewegungen, wenn die Wirkung der Kraft sich nicht erneuert, immer langsamer werden.

Wenn eine Kraft stätig ist, d. h. wenn sie zu wirken nicht aufhört, so erhält das Bewegliche zu der Geschwindigkeit die es schon hat, in jedem Augenblicke einen Zuwachs. Die Bewegung wird demnach beschleunigt sein. Hat nun die beschleunigende Kraft auch immer denselben Grad, so wird die Zunahme der Geschwindigkeit, der Dauer der Einwirkung nothwendigerweise verhältnissmässig sein. Nach 2 Sekunden ist sie nämlich doppelt so

gross als nach 1 Sekunde; nach 3 Sekunden ist sie dreimal so gross, u. s. f. Die Bewegung ist daher eine gleichförmig beschleunigte. Da bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeit genau so zunimmt wie die Zeit, so muss sie am Ende der 2^{ten} Sekunde doppelt so gross sein, als am Ende der ersten, am Ende der 3^{ten} dreimal so gross, am Ende der 10^{ten} (n^{ten}) zehnmal (n mal) so gross, oder allgemein: die Geschwindigkeiten wachsen bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung, wie die Reihe der natürlichen Zahlen 1. 2. 3.

Wenn der Körper eine gewisse Zeit mit gleichförmig beschleunigter Bewegung fortgegangen ist, so hat er am Ende dieser Zeit eine gewisse Geschwindigkeit. Hätte er diese Geschwindigkeit schon im Anfang seiner Bewegung gehabt, und würde sie durch die ganze Zeit dieselbe geblieben sein, so hätte der Körper in einer gleichförmigen Bewegung einen gewissen Weg zurückgelegt. Da aber seine Anfangsgeschwindigkeit 0 war, und erst allmählig bis zu der bestimmten Endgeschwindigkeit angewachsen ist, so kann er mittelst dieser gleichförmig beschleunigten Bewegung keinen so grossen Weg zurückgelegt haben. Es fragt sich nun, wie vielmal sein Weg kleiner sein müsse, als er in dem zuerst genannten Fall gewesen wäre, und ist nicht schwer einzusehen, dass er nur die Hälfte davon betragen könne; denn die Geschwindigkeit wächst

während der ganzen Zeit allmählig von 0 bis zu der bestimmten Endgeschwindigkeit. Der Körper geht also in jedem Augenblicke mit einer etwas grösseren Geschwindigkeit als in dem vorhergehenden. Der Raum den er in der ganzen Zeit zurücklegt, muss demnach proportional sein, allen den Geschwindigkeiten vom ersten bis zum letzten Augenblick der Bewegung. Oder der Körper wird mittelst allen diesen Geschwindigkeiten denselben Raum zurücklegen, den er auch zurückgelegt haben würde, wenn er vom Anfang bis zum Ende der Bewegung immerfort mit der mittleren Geschwindigkeit fortgegangen wäre; denn um wie viel vom Anfange bis zur Hälfte der Zeit die einzelnen Geschwindigkeiten der untheilbaren Augenblicke kleiner sind, als die Geschwindigkeit des mittelsten Augenblicks, gerade um so viel sind die Geschwindigkeiten der einzelnen untheilbaren Augenblicke der zweiten Hälfte der Bewegungszeit grösser. Diese mittlere Geschwindigkeit aber ist die Hälfte der Endgeschwindigkeit; also ist auch der Raum, den der Körper mittelst dieser mittleren Geschwindigkeit in der bestimmten Zeit zurücklegt, die Hälfte des Raumes, den er mit der Endgeschwindigkeit in derselben Zeit gleichförmig zurücklegen müsste. Die Räume, die der so bewegte Körper in den einzelnen Zeiten (Sekunden) zurücklegt, können sich daher nicht verhalten wie die Endgeschwindigkeiten; wohl aber müssen sie den mittleren Geschwindigkeiten jedes Zeittheils proportional

sein. Drückt man die Endgeschwindigkeiten durch 1. 2. 3. 4. 5. . . . aus, so müssen die mittleren Geschwindigkeiten durch $\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{2}$. oder durch $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{5}{2}$. $\frac{7}{2}$. $\frac{9}{2}$. ausgedrückt werden. Die mittleren Geschwindigkeiten wachsen demnach wie die ungeraden Zahlen 1. 3. 5. 7. 9. und so müssen also auch die Räume, die der mit gleichförmig beschleunigter Bewegung bewegte Körper in den einzelnen Zeiten zurücklegt, zunehmen wie die ungeraden Zahlen, oder der Raum der 2^{ten} Sekunde ist dreimal, der Raum der 3^{ten} Sekunde fünfmal, der Raum der 4^{ten} Sekunde siebenmal, der Raum der 5^{ten} Sekunde neunmal grösser als der der ersten.

Wenn man die Räume, die der Körper vom Anfange der Bewegung bis zum Ende irgend einer bestimmten Zeit zurücklegt, summirt, so nennt man diese Summe den Raum der ganzen Zeit. Man findet, dass auf diese Art der Raum der zwei ersten Zeiten 4mal so gross ist, als der Raum der ersten Zeit; der Raum aller drei ersten Zeiten 9mal; der Raum aller vier ersten Zeiten 16mal; der Raum aller fünf ersten Zeiten 25mal grösser ist, als der der ersten Zeit, oder allgemein: die Räume vom Anfange der Bewegung bis zum Ende bestimmter Zeittheile summirt (oder die Räume ganzer Zeiten), wachsen wie die zweiten Potenzen der Zahlen welche die Zeiten ausdrücken, nämlich wie 1^2 . 2^2 . 3^2 . 4^2 . 5^2 . —

Die Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung lassen sich folgendermassen ausdrücken :

1) Die Endgeschwindigkeiten nehmen zu wie die Zeiten, also wie die natürlichen Zahlen.

2) Die Räume der einzelnen Zeiten wachsen wie die ungeraden Zahlen, denn so wachsen die mittleren Geschwindigkeiten.

3) Die in den ganzen Zeiten von Anfang der Bewegung an beschriebenen Räume, verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten oder der Endgeschwindigkeiten, also wie die Quadrate der natürlichen Zahlen.

4) Wenn ein mit gleichförmig beschleunigter Bewegung fortgehender Körper mit der Geschwindigkeit die er nach einer bestimmten Zeit erlangt hat, nachher gleichförmig fortginge: so würde er, in einer dieser ganzen Bewegungsdauer gleichen folgenden Zeit, einen doppelt so grossen Raum zurücklegen, als er von Anfang der Bewegung zurückgelegt hat. —

Die gleichförmig verzögerte Bewegung ist genau das Gegentheil der gleichförmig beschleunigten. Ihre Gesetze lassen sich demnach aus denjenigen der ebengenannten Bewegung erkennen; man braucht diese nämlich nur umzukehren und statt Endgeschwindigkeit überall Anfangsgeschwindigkeit zu setzen. Nämlich:

1) Die Anfangsgeschwindigkeiten nehmen ab wie die natürlichen Zahlen. Wenn z. B. die Anfangsgeschwindigkeit der ersten Sekunde 4 ist, so ist sie

für die 2^{te} Sekunde 3, für die 3^{te} Sekunde 2, für die 4^{te} 1, dann 0, dann — 1. Man sieht dass diese Bewegung einmal 0 wird, und sich dann in eine nach entgegengesetzter Richtung verwandelt.

2) Der Körper legt vom Anfange einer bestimmten Zeit, bis zum Augenblicke wo seine Bewegung 0 wird, nur die Hälfte desjenigen Raumes zurück, den er zurückgelegt haben würde, wenn er durch den ganzen Zeitraum mit der Anfangsgeschwindigkeit fortgegangen wäre.

3) Wenn man die Räume die der Körper in den einzelnen Zeittheilen (Sekunden) zurücklegt, durch Zahlen ausdrückt, so nehmen diese ab wie die ungeraden Zahlen; z. B. wenn der Raum der 1^{ten} Sekunde 11, der 2^{ten} Sekunde 9 ist, so ist der Raum der 3^{ten} Sekunde 7.

4) Summirt man diese Räume vom Anfange eines jeden Zeittheils bis zum Ende der Bewegung, so nehmen sie ab, umgekehrt wie die zweiten Potenzen der natürlichen Zahlen. Bei den letzten zwei Gesetzen wird vorausgesetzt, das der Raum in dem letzten Zeittheile durch 1 ausgedrückt werde.

Eine gleichförmig verzögerte Bewegung muss entstehen, wenn einem bewegten Körper irgend eine stätige und in Bezug auf ihre Stärke, immer sich gleich bleibende Kraft entgegenwirkt. —

g
n
von einer einri-
nachdem sie auf-
wirken aufhört,
en, als dass sie

Die Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung lassen sich folgendermassen ausdrücken:

1) Die Endgeschwindigkeiten nehmen zu wie die Zeiten, also wie die natürlichen Zahlen.

2) Die Räume der einzelnen Zeiten wachsen wie die ungeraden Zahlen, denn so wachsen die mittleren Geschwindigkeiten.

3) Die in den ganzen Zeiten von Anfang der Bewegung an beschriebenen Räume, verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten oder der Endgeschwindigkeiten, also wie die Quadrate der natürlichen Zahlen.

4) Wenn ein mit gleichförmig beschleunigter Bewegung fortgehender Körper mit der Geschwindigkeit die er nach einer bestimmten Zeit erlangt hat, nachher gleichförmig fortgienge: so würde er, in einer dieser ganzen Bewegungsdauer gleichen folgenden Zeit, einen doppelt so grossen Raum zurücklegen, als er von Anfang der Bewegung zurückgelegt hat. —

Die gleichförmig verzögerte Bewegung ist genau das Gegentheil der gleichförmig beschleunigten. Ihre Gesetze lassen sich demnach aus denjenigen der ebengenannten Bewegung erkennen; man braucht diese nämlich nur umzukehren und statt Endgeschwindigkeit überall Anfangsgeschwindigkeit zu setzen. Nämlich:

1) Die Anfangsgeschwindigkeiten nehmen ab wie die natürlichen Zahlen. Wenn z. B. die Anfangsgeschwindigkeit der ersten Sekunde 4 ist, so ist sie

für die 2^{te} Sekunde 3, für die 3^{te} Sekunde 2, für die 4^{te} 1, dann 0, dann — 1. Man sieht dass diese Bewegung einmal 0 wird, und sich dann in eine nach entgegengesetzter Richtung verwandelt.

2) Der Körper legt vom Anfange einer bestimmten Zeit, bis zum Augenblicke wo seine Bewegung 0 wird, nur die Hälfte desjenigen Raumes zurück, den er zurückgelegt haben würde, wenn er durch den ganzen Zeitraum mit der Anfangsgeschwindigkeit fortgegangen wäre.

3) Wenn man die Räume die der Körper in den einzelnen Zeittheilen (Sekunden) zurücklegt, durch Zahlen ausdrückt, so nehmen diese ab wie die ungeraden Zahlen; z. B. wenn der Raum der 1^{ten} Sekunde 11, der 2^{ten} Sekunde 9 ist, so ist der Raum der 3^{ten} Sekunde 7.

4) Summirt man diese Räume vom Anfange eines jeden Zeittheils bis zum Ende der Bewegung, so nehmen sie ab, umgekehrt wie die zweiten Potenzen der natürlichen Zahlen. Bei den letzten zwei Gesetzen wird vorausgesetzt, das der Raum in dem letzten Zeittheile durch 1 ausgedrückt werde.

Eine gleichförmig verzögerte Bewegung muss entstehen, wenn einem bewegten Körper irgend eine stätige und in Bezug auf ihre Stärke, immer sich gleich bleibende Kraft entgegenwirkt. —

Von einer Bewegung die von einer einzigen Kraft bewirkt wird, welche nachdem sie auf das Bewegliche eingewirkt hat, zu wirken aufhört, lässt sich nichts weiters bemerken, als dass sie

geradlinig und wenn kein Hinderniss entgegenwirkt, gleichförmig sein muss. —

Wenn aber zwei oder mehrere Kräfte zugleich auf ein Bewegliches wirken, so sind folgende drei Fälle möglich: entweder wirken sie in derselben Richtung, oder in entgegengesetzter Richtung, oder endlich bilden die Richtungen derselben einen Winkel.

Wird ein Körper von zwei Kräften zugleich in derselben Richtung getrieben, so ist seine Geschwindigkeit der Summe der Kräfte proportional. Eine Kraft vermehrt nämlich die Wirkung der anderen. Der Körper bewegt sich somit mit der Summe der Kräfte.

Zwei auf ein Bewegliches in entgegengesetzter Richtung wirkende Kräfte, sind entweder einander gleich oder ungleich. Im ersten Fall heben sie einander auf, und das Bewegliche ruht. Im zweiten Fall muss das Bewegliche sich nach der Richtung der stärkeren Kraft, und zwar mit der Differenz der Kräfte bewegen, d. h. seine Geschwindigkeit wird dem Unterschied beider Kräfte proportional sein.

Wird das Bewegliche von zwei Kräften getrieben, deren Richtungen einen Winkel einschliessen, so muss es um beiden Kräften zu folgen, einen Weg beschreiben, der zwischen den beiden Wegen liegt, welche es zu gleicher Zeit zurücklegen sollte. Sind nun diese zwei Wege, beziehungsweise die Kräfte einander vollkommen gleich, so wird der

wirkliche Weg des Beweglichen genau zwischen jenen zwei Seitenwegen liegen müssen, mithin den Winkel halbiren unter welchem die Kräfte wirken. Um nun für jeden Fall sowohl die Richtung als auch die Geschwindigkeit zu finden, muss man nicht nur die Richtungen der Kräfte, sondern auch die Geschwindigkeiten kennen, die jede derselben für sich dem Beweglichen würde ertheilt haben. Das Bewegliche werde (Fig. II.) von a aus, nach der Richtung $a m$ und $a n$ getrieben; nach der Richtung $a m$ sollte es in eben der Zeit den Weg $a b$ beschreiben, in welcher es nach der Richtung $a n$ den Weg $a c$ zurücklegt. Man zieht nun von den Endpunkten jedes dieser Wege, also von b und c eine Linie, die zu dem anderen Wege parallel ist ($b d$ und $c d$), bis diese sich schneiden. Dadurch entsteht das Parallelogramm $a b c d$. Nun ziehe man die Diagonale $a d$. Diese Diagonale giebt den Weg an, welchen das Bewegliche in der nämlichen Zeit zurücklegt, in der es die eine oder die andere Seite des Parallelogramms würde zurückgelegt haben, wäre es bloss von einer der zwei Kräfte getrieben worden. Denn durch die Beschreibung dieser Diagonale, thut das Bewegliche beiden Kräften Genüge. Man nennt die Bewegungen nach den Seiten des Parallelogramms Seitenbewegungen; die dabei wirkenden Kräfte Seitenkräfte; die Bewegung in der Diagonale resultirende Bewegung; die dabei stattfindende Zusammenwirkung der Kräfte,

die resultirende Kraft, oder auch nur die Resultirende. Hieraus folgt: dass die Geschwindigkeit die aus der zusammengesetzten Bewegung hervorgeht, immer kleiner sein muss, als die Summe der Geschwindigkeiten, welche durch die einzelnen Kräfte, wenn diese abgesondert gewirkt hätten, wäre hervorgebracht worden. Denn offenbar ist die Diagonale eines Parallelogramms immer kleiner, als die Summe zweier sich berührenden Seiten desselben.

Es hängt ferner bei der zusammengesetzten Bewegung, die Geschwindigkeit nicht allein von der Stärke der wirkenden Kräfte, welche dieselben einzeln hervorzubringen im Stande gewesen wären, sondern auch von dem Winkel ab, unter welchem sie zusammen wirken. Je spitzer dieser Winkel ist, desto grösser ist die resultirende Geschwindigkeit; je stumpfer er ist, desto kleiner ist sie. Wird er unendlich spitzig, d. h. 0, so wirken die Kräfte nach einer und derselben Richtung und das Bewegliche geht demnach mit der Summe der Kräfte. Wird er dagegen ein Winkel von 180° , so sind die Richtungen der Kräfte einander vollkommen entgegengesetzt, und das Bewegliche geht mit der Differenz der Kräfte.

Zweiter Abschnitt.

Von der Flugbahn der Geschosse im Allgemeinen.

Jeder geworfene Körper wird wenigstens von zwei Kräften zugleich getrieben, nämlich von der Wurfkraft unter gewissen Umständen auch Stosskraft genannt, und von der Schwerkraft.

Die Flugbahn eines Geschosses wird in der Wirklichkeit durch folgende Kräfte bestimmt:

1) Durch die Stärke und Richtung des Stosses, den das Geschoss vermöge der Spannung der bei Verbrennung der Pulverladung sich erzeugenden Gase erhält.

2) Durch die Schwerkraft des Geschosses.

3) Durch den Widerstand der Luft.

Die Stärke des Stosses hängt vorzüglich von der Grösse der Pulverkraft ab, welche entwickelt wird, während dem das Geschoss die Bohrung durchläuft. Der Stoss wird bei einer gegebenen Ladung um so stärker sein, je besser das Pulver ist, und je günstiger die Umstände seiner raschen Entzündung und vollständigen Zusammenbrennung sind. Durch Vermehrung der Ladung kann der Stoss bis auf ein gewisses Maximum vergrössert werden, welches dann eintritt, wenn die Ladung gerade so gross ist, dass sie sich noch

vollständig zersetzen kann, ehe das Geschoss die Mündung verlässt. Ueber dieses Maximum hinaus würde jede Verstärkung der Ladung, eher nachtheilig als vortheilhaft auf die Stärke des Stosses einwirken, woraus hervorgeht: dass es für jedes Geschütz eine bestimmte Ladung geben muss, welche dem Geschoss eine grössere Geschwindigkeit mittheilt, als jede andere stärkere oder schwächere Ladung. — Die Form der Ladung hat Einfluss auf die Stärke des Stosses, insofern sie der Entzündung und Zusammenbrennung mehr oder weniger günstig ist. — Die Länge der Geschützröhre hat einen bedeutenden Einfluss auf die Stärke des Stosses. Es wird nämlich in einem längeren Rohre die Expansivkraft des entwickelten Pulvergases mehr Zeit auf das Geschoss einwirken, als in einem kürzeren, und daher dem Geschosse eine um so grössere Geschwindigkeit mittheilen. Dagegen sind die länger anhaltende Reibung und die vermehrten Anschläge im Rohre ungünstig. — Durch den Spielraum und das Zündloch entweicht ein Theil des Pulvergases, wodurch der Stoss beträchtlich vermindert werden kann. — Das zunehmende Gewicht des Geschosses im Verhältniss zu seinem Durchmesser kann den Stoss vergrössern, indem dadurch dem Pulver ein grösserer Widerstand entgegengesetzt wird, den es zu überwinden hat, und somit die vollständigere Zersetzung des Pulvers befördert. — Die Lage

des Geschosses im Rohre hat ebenfalls auf den Stoss Einfluss. Nur der zentrale, das ist durch den Mittelpunkt des Geschosses gehende Stoss, wirkt in seiner ganzen Grösse. Ein leerer Raum zwischen der Ladung und dem Geschosse schwächt den Stoss, da das entwickelte Pulvergas sich auf Kosten der Expansivkraft in demselben ausdehnen kann. — Da die Geschwindigkeit mit der sich das Geschoss bewegt, so lange zunimmt, als die Kraft des entwickelten Gases unmittelbar auf dasselbe einwirkt, so muss sie an der Mündung des Geschützes am grössten sein, und von da an wegen dem Widerstande der Luft fortwährend abnehmen. Die Geschwindigkeit, welche das Geschoss besitzt im Augenblicke, wo dasselbe die Mündung des Geschützes verlässt, nennt man die Anfangsgeschwindigkeit; sie wird durch den Raum ausgedrückt, welchen das Geschoss in einer Sekunde zurücklegen würde, wenn es sich gleichförmig mit dieser Geschwindigkeit fortbewegen könnte. — Die Geschwindigkeit welche das Geschoss besitzt im Augenblicke, wo es am Ziele einschlägt, heisst Endgeschwindigkeit, und die halbe Summe beider — mittlere Geschwindigkeit. — Die Richtung des Stosses hat hauptsächlich auch Einfluss auf die Gestalt der Flugbahn, weil das Geschoss, wenn keine anderen Kräfte auf dasselbe einwirken würden, sich stets in dieser Richtung bewegen müsste. Sie ist in der Richtung der Mit-

tellinie der Bohrung gegeben und folglich durch den Richtungswinkel bestimmt. —

Die Schwere die in den Körpern auf der Erde sich wirksam zeigt, nennt man die irdische. Die Schwere der Weltkörper wird mit dem Namen Gravitation bezeichnet. Die Schwere der irdischen Körper zeigt sich in dem immerwährenden Bestreben derselben, sich der Erde zu nähern; denn alle Körper die auf Unterlagen ruhen, drücken auf dieselben ohne Aufhören, und bewegen sich, wenn jene ihnen entnommen werden, in einer lothrechten Linie gegen die Erde. Man nennt diess das Fallen der Körper. Die lothrechte Linie in der sich ein fallender Körper der Erde naht, wird die Richtungslinie der Schwere genannt. Als Ursache dieser Erscheinungen denkt man sich die Anziehung mit welcher die Erde auf jedes materielle Theilchen wirkt. Das Maass derselben ist der Fallraum eines Körpers in einer Sekunde. Der Erfahrung zufolge, fällt in der ersten Sekunde jeder Körper in der Nähe der Erde, die Hindernisse der Bewegung weggedacht 16, 3394 Schweizerfuss.

Da die Schwere eine stätige Kraft ist, und auf den fallenden Körper immer mit gleicher Stärke wirkt, so muss seine Bewegung eine gleichförmig beschleunigte sein, daher auch alle Gesetze dieser Bewegung auf den freien Fall der Körper anzuwenden sind. Ist nun der Fallraum der ersten Sekunde bekannt, so lässt sich daraus alles

Uebrige bestimmen. Ist für die zur Einheit genommene Zeit (eine Sekunde) der Fallraum $\frac{1}{2}g$, die Endgeschwindigkeit g , so ergibt sich für jede andere Zeit t , der Fallraum s , und die Endgeschwindigkeit c , aus den Proportionen:

I. $g : c = 1 : t$. (d. h. die Endgeschwindigkeiten wachsen wie die Zeiten.)

II. $\frac{1}{2}g : s = 1^2 : t^2$. (d. h. die Räume verhalten sich wie die Quadrate der ganzen Bewegungszeiten.)

III. $\frac{1}{2}g : s = g^2 : c^2$. (d. h. die Räume verhalten sich auch wie die Quadrate der Endgeschwindigkeiten.)

Ist nun g bekannt, und ist von den drei Größen c , s , t , auch eine bekannt, so lassen sich die übrigen zwei leicht bestimmen.

$$c = gt = \sqrt{2gs}.$$

$$c^2 = \frac{g^2s}{\frac{1}{2}g} = \frac{2g^2s}{g} = 2gs.$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{\frac{1}{2}gc^2}{g^2} = \frac{\frac{1}{2}c^2}{g} = \frac{c^2}{2g}$$

$$t = \frac{c}{g} = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$t^2 = \frac{s}{\frac{1}{2}g} = \frac{2s}{g}.$$

Der Fallraum selbst aber für die erste Sekunde ist wegen der Geschwindigkeit fallender Körper durch unmittelbare Beobachtung schwer zu bestimmen. Leichter ist es einen bedeutenden Raum s

genau zu messen, einen Körper durch denselben fallen zu lassen, die Zeit des Falles zu bemerken, und aus dieser beobachteten Zeit den Fallraum der ersten Sekunde oder $\frac{1}{2} g$ zu bestimmen. Es ist

nämlich $\frac{1}{2} g = \frac{s}{t^2}$. Mithin $g = \frac{2s}{t^2}$. Uebri-

gens ist auch $g = \frac{c}{t}$.

Für die Wurf**b**ewegung eines Körpers lassen sich drei Fälle voraussetzen. Entweder wirkt die Wurfkraft und die Schwerkraft nach einer und derselben Richtung, oder beide Kräfte wirken nach entgegengesetzten Richtungen, oder ihre Richtungen schliessen einen Winkel ein. Die diessfälligen Ergebnisse sind übrigens dabei so zu betrachten, wie sie Statt hätten, wenn es keinen Widerstand der Luft geben würde.

Im ersten Fall, wenn nämlich der Körper **v**ertikal **a**bwärt**s** geworfen wird, bewegt er sich nach der beiden Kräften gemeinschaftlichen Richtung, d. h. abwärts mit der Summe der Kräfte. Zu den Räumen, welche er mittelst der Schwerkraft allein beschreiben würde, sind diejenigen hinzuzuzählen, welche er in jeder Zeiteinheit mittelst der Wurfkraft zu beschreiben hat oder $s = tv + \frac{1}{2} gt^2$, wo s den in der Zeit t zurückgelegten Weg, v die durch die Wurfkraft bewirkte Geschwindigkeit der Bewegung, und $\frac{1}{2} g$ den Fallraum in der ersten Sekunde bezeichnet.

Im zweiten Fall, wenn nämlich der Körper vertikal aufwärts geworfen wird, und die Wurfkraft stärker ist als die Schwerkraft, steigt er mit der Differenz der Kräfte. Man findet die beschriebenen Räume, wenn man von dem Raume den er mittelst der Wurfkraft in einer jeden Sekunde zurücklegen sollte, den Raum abzieht, durch den er zugleich mittelst der Schwerkraft in jeder Sekunde fällt. Seine Bewegung ist eine gleichförmig verzögerte. Die Geschwindigkeit nimmt allmählig ab, bis sie endlich 0 wird; dann fängt der Körper an zu fallen, und seine Bewegung geschieht nach den Gesetzen des freien Falles. Der ganze nach aufwärts beschriebene Raum $s = vt - \frac{1}{2}gt^2$, wo v die Anfangsgeschwindigkeit, t die Zeit, und $\frac{1}{2}g$ den Fallraum der ersten Sekunde ausdrückt.

Im dritten Fall, wenn nämlich die Richtung der Wurfkraft mit derjenigen der Schwerkraft einen Winkel bildet, wird sich der Körper in einer krummen Linie bewegen. Es ist erwiesen, dass diese Linie, insofern es keinen Widerstand der Luft gäbe, eine Parabel sein müsste. In der Wirklichkeit beschreibt aber der geworfene Körper wegen dem Widerstande der Luft keine Parabel. Wird er in schräger Richtung hinaufgeworfen, so bemerkt man, dass der aufsteigende und der niedersteigende Theil der krummen Linie einander nicht gleich sind, sondern dass der niedersteigende sich immer mehr und mehr der Vertikallinie nähert.

Abgesehen vom Widerstande der Luft, sind es zwei Kräfte, welche die Flugbahn der Geschosse bestimmen, und da die Wirkungen zweier Kräfte bereits bekannt sind, so können dieselben, bei der nunmehr folgenden Betrachtung der Flugbahn der Geschosse im luftleeren Raume angewandt werden.

Dritter Abschnitt.

Von der Flugbahn der Geschosse im luftleeren Raume.

(Fig. III.)

Das Geschoss werde von a aus in der Richtung a n getrieben, und zwar mit einer Geschwindigkeit, in welcher dasselbe in einer Sekunde den Weg a b' durchlaufen würde. Wenn nun das Geschoss einzig nur der Stosskraft zu folgen hätte, und die Schwere ohne Wirkung wäre, so müsste dasselbe immer in der Richtung a n verbleiben, und am Ende der

- 1ⁿ Sekunde in b'.
- 2ⁿ Sekunde in b'', wenn $ab'' = 2ab'$,
- 3ⁿ Sekunde in b''', wenn $ab''' = 3ab'$,
- 4ⁿ Sekunde in b''', wenn $ab'''' = 4ab'$,
- tⁿ Sekunde in b, wenn $ab = tab'$, ankommen.

Da aber die Schwerkraft gleich im Anfange der Bewegung auf das Geschoss einwirkt, so wird dasselbe von der Mündung des Geschützes an die ursprüngliche Richtung $a n$ verlassen, und am Ende der 1ⁿ Sekunde statt in b' in c' , — am Ende der 2ⁿ Sekunde statt in b'' in c'' . — am Ende der 3ⁿ Sekunde statt in b''' in c''' , — am Ende der t ⁿ Sekunde statt in b in c sein, und $bc = \frac{1}{2} gt^2$. Man ziehe aus den Punkten b', b'', b''', b'''' , ... b , die Senkrechten $b'c' = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} g$; $b''c'' = \frac{4}{2} g$; $b'''c''' = \frac{9}{2} g$; $b''''c'''' = \frac{16}{2} g$; $bc = \frac{1}{2} gt^2$; so sind die Punkte c', c'', c''', c'''' , k und c , Punkte der Flugbahn des Geschosses, nach Berücksichtigung beider Kräfte der Stosskraft und der Schwerkraft. Die durch diese Punkte gezogene krumme Linie heisst *Parabel*, und wird um so genauer sein, je näher sich die Punkte an einander befinden.

Nimmt man die Horizontale ac als Abscissenlinie an, so dass zu der Abscisse $ad = x$, die senkrechte Ordinate $c'd = y$ gehört; so ist im rechtwinklichten Dreieck $ab'd$, $b'd = ad. \tan \vartheta$, $= x. \tan \vartheta$. Ferner $ab'^2 = ad^2 + b'd^2 = x^2 + x^2. \tan^2 \vartheta$, und $b'c' = b'd - c'd = x. \tan \vartheta - y$. Nun ist $b'c' = \frac{1}{2} gt^2$, woraus $t^2 = \frac{b'c'}{\frac{1}{2} g} = \frac{s}{\frac{1}{2} g}$ wird. Endlich ist $ab' = gt$ und $ab'^2 = g^2 t^2$, und wenn der frühere Werth von t^2 in diese

Gleichung substituirt wird, so erhält man $ab'^2 = \frac{g^2 b'c'}{\frac{1}{2}g} = \frac{g^2 s}{\frac{1}{2}g} = 2gs.$

Es wäre somit auch $ab'^2 = \frac{g^2}{\frac{1}{2}g} (x. \text{tang } \vartheta - y) = 2g (x. \text{tang } \vartheta - y).$

Setzt man diese Werthe von ab' einander gleich, so erhält man die Gleichung der Flugbahn im luftleeren Raume $x^2 + x^2. \text{tang}^2. \vartheta = 2g (x. \text{tang } \vartheta - y)$, welche nach Erforderniss auf die darin vorkommenden Grössen, x , y , und $\text{tang } \vartheta$ reducirt werden kann.

Nennt man die horizontale Schussweite $ac = x$, und setzt ferner die zu dieser Abscisse gehörende Ordinate $y = 0$, so erhält man:

$$x^2 + x^2. \text{tang}^2 \vartheta = 2g (x. \text{tang } \vartheta) \text{ oder}$$

$$x (1 + \text{tang}^2 \vartheta) = 2g. \text{tang } \vartheta.$$

Hieraus folgt:

$$\text{I. } x = 2g \left(\frac{\text{tang } \vartheta}{1 + \text{tang}^2 \vartheta} \right) = 2g. \text{Sin } \vartheta. \text{Cos } \vartheta = 2g. \frac{\text{Sin } 2 \vartheta}{2} = g. \text{Sin } 2 \vartheta, \text{ weil}$$

$$\text{Sin } \vartheta. \text{Cos } \vartheta = \frac{\text{Sin } 2 \vartheta}{2} \text{ ist.}$$

$$\text{Sin } 2 \vartheta = \text{Sin } (180^\circ - 2 \vartheta) = \text{Sin } 2 (90^\circ - \vartheta).$$

Bezeichnet man ferner die Dauer der Flugzeit von a nach c durch t , so ist der Werth von $bc = \frac{1}{2}gt^2$. Es ist aber auch im rechtwinklichten Dreiecke abc ,

$$bc = ac. \text{tang } \vartheta = x. \text{tang } \vartheta.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{2} g t^2 = x \cdot \tan \vartheta, \text{ und}$$

$$\text{II. } t^2 = \frac{x \cdot \tan \vartheta}{\frac{1}{2} g} \text{ oder auch } = \frac{s}{\frac{1}{2} g}.$$

Zugleich ist $ab' = gt$, und im rechtwinklichten Dreieck abc ,

$$ab = \frac{ac}{\cos \vartheta} = \frac{x}{\cos \vartheta}.$$

Aus $gt = c = \frac{x}{\cos \vartheta}$, folgt:

$$t = \frac{x}{g \cos \vartheta} \text{ und wenn der Werth von } t^2 =$$

$$\frac{x \cdot \tan \vartheta}{\frac{1}{2} g} = \frac{x \sin \vartheta}{\frac{1}{2} g \cos \vartheta}$$

(weil $\tan \vartheta = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}$ ist) durch denjenigen von

$t = \frac{x}{g \cos \vartheta}$ dividirt wird, so erhält man:

$$\text{III. } t = \frac{x \cdot \sin \vartheta}{\frac{1}{2} g \cos \vartheta} \cdot \frac{g \cdot \cos \vartheta}{x} =$$

$$\frac{x \cdot g \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta}{\frac{1}{2} g \cdot x \cdot \cos \vartheta} = \frac{g \cdot \sin \vartheta}{\frac{1}{2} g} = \frac{c}{g}.$$

Aus den obigen drei Gleichungen lassen sich folgende Regeln für horizontale Schussweiten im luftleeren Raume ableiten: die Schussweite oder die Grösse x kann nämlich auf dreierlei Weise vermehrt oder vermindert werden:

- 1) durch Veränderung des Richtungswinkels;
- 2) durch Veränderung der Ladung, wodurch die Geschwindigkeit ab' grösser oder kleiner wird;

3) durch Veränderung der Richtung und Ladung.

1) Bei gleicher Ladung und verschiedener Elevation verhalten sich die Schussweiten wie die Sinus der doppelten Elevationswinkel.

Erhält man mit einer Ladung, welche die Geschwindigkeit c ertheilt, die Schussweite x bei ϑ^0 Elevation, — und die Schussweite x' bei ϑ'^0 Elevation, so ist $x = g \sin 2\vartheta$, und $x' = g \sin 2\vartheta'$, mithin verhält sich:

$$x : x' = g \sin 2\vartheta : g \sin 2\vartheta' \text{ — } x : x' = \sin 2\vartheta : \sin 2\vartheta'.$$

Zur Berechnung der Sinus der doppelten Elevationswinkel dient die nachstehende Sinustafel für den Halbmesser = 10000.

Sinustafel

für den Halbmesser = 10000.

Elevations- winkel in Graden.		Sinus der doppelten Elevations- winkel.	Elevations- winkel in Graden.		Sinus der doppelten Elevations- winkel.
4	86	1392	25	65	7660
5	85	1736	26	64	7880
6	84	2079	27	63	8090
7	83	2419	28	62	8290
8	82	2756	29	61	8480
9	81	3090	30	60	8660
10	80	3420	31	59	8829
11	79	3746	32	58	8988
12	78	4067	33	57	9135
13	77	4384	34	56	9272
14	76	4695	35	55	9397
15	75	5000	36	54	9511
16	74	5299	37	53	9613
17	73	5592	38	52	9703
18	72	5878	39	51	9781
19	71	6157	40	50	9848
20	70	6428	41	49	9903
21	69	6691	42	48	9945
22	68	6947	43	47	9976
23	67	7193	44	46	9994
24	66	7431	45	45	10000

Beispiel: Der 50 lb Mörser ergiebt mit $33\frac{1}{4}$ Loth Ladung und 60° Elevation eine Schussweite von 1200 Schritt; welche Elevation ist erforderlich um bei gleicher Ladung eine Schussweite von 1000 Schritt zu erreichen?

$$1200 : 1000 = \sin 2. 60^\circ : \sin 2. x^\circ.$$

$$\sin 2. x = \frac{1000 \cdot 8660}{1200} = 7217 = 67^\circ, \text{ weil } 7217$$

der Verhältnisszahl von 23° oder $67^\circ = 7193$ am nächsten entspricht.

Beispiel: Der 50 lb Mörser ergiebt mit 17 Loth Ladung und 42° Elevation eine Schussweite von 600 Schritt; welche Elevation ist erforderlich um bei gleicher Ladung eine Schussweite von 1100 Schritt zu erreichen?

$$600 : 1100 = \sin 2. 42^\circ : \sin 2. x^\circ.$$

$$\sin 2. x = \frac{1100 \cdot 9945}{600} = 18232, \text{ also unmöglich,}$$

weil dieser Quotient grösser als der Halbmesser ist. Es muss daher die Ladung verstärkt werden, um eine Schussweite von 1100 Schritt zu erreichen. —

2) Für jede Schussweite giebt es zwei Elevationswinkel die von 45° gleich weit abstehen. (Fig. IV.)

Wenn man nach der obigen Proportion:

$$\sin 2. \varphi' = \frac{x' \sin 2. \varphi}{x}$$

oder die Grösse der Linie bc berechnet hat, so ist in den trigonometrischen Tafeln der entsprechende Winkel $2. \varphi'$ zu suchen. Nun sind aber

zwei Winkel, welche den Sinus $= b c$ haben, nämlich $\angle b a c$ und $\angle b a d$. In den Tafeln ist aber nur der kleinere enthalten. Der grössere $\angle b a d$ ist $= 180^\circ - \angle b a c$.

Wenn also in den Tafeln $\angle 2 \vartheta' = \angle b a c$ gefunden wird, so kann derselbe auch $\angle 2 \vartheta' = \angle b a d = 180^\circ - \angle b a c = 180^\circ - \angle 2 \vartheta'$ heissen.

Man erhält somit für $\angle \vartheta'$ die beiden Werthe

$$\frac{\angle b a c}{2} \text{ und } \frac{\angle b a d}{2}, \text{ oder}$$

$$\frac{\angle b a c}{2} \text{ und } \frac{180^\circ - \angle b a c}{2}, \text{ oder}$$

$$\frac{\angle b a c}{2} \text{ und } \frac{90^\circ - \angle b a c}{2}, \text{ oder}$$

$$\angle \vartheta' \text{ und } 90^\circ - \angle \vartheta'.$$

Ist folglich

$$\angle \vartheta' = 1^\circ, \text{ so ist auch } \angle \vartheta' = 90^\circ - 1^\circ = 89^\circ.$$

$$\angle \vartheta' = 2^\circ = = = \angle \vartheta' = 90^\circ - 2^\circ = 88^\circ.$$

$$\angle \vartheta' = 42^\circ = = = \angle \vartheta' = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ.$$

$$\angle \vartheta' = 45^\circ = = = \angle \vartheta' = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Hieraus ergibt sich: dass unter zwei Richtungswinkeln, welche so beschaffen sind, dass der eine derselben das Komplement des andern ist, d. h. die gleich weit von 45° abstehen, gleiche Schussweiten erreicht werden. —

3) Die Schussweite bei 45° Elevation ist die grösste für ein und dieselbe Ladung; und die Schussweiten bei 15° und 75° sind gleich der Hälfte der grössten Schussweite.

Aus der Formel :

$$\frac{x}{x'} = \frac{\sin 2 \vartheta}{\sin 2 \vartheta'}$$

ergiebt sich, dass bei gleichen Ladungen, die Schussweiten sich verhalten, wie die Sinus der doppelten Elevationswinkel, woraus man schliesst, dass bei 15° und 75° die Schussweite halb so gross als bei 45° sei, weil

$$\sin (2. 15^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{\text{Rad}}{2}.$$

$$\sin (2. 75^\circ) = \sin 180^\circ - 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{\text{Rad}}{2}.$$

$$\sin (2. 45^\circ) = \sin 90^\circ = \text{Rad}.$$

Ferner ergiebt sich, dass die Schussweiten von 0° bis 45° immer zunehmen, weil die Sinus von $2. 0^\circ$ bis $2. 45^\circ$ ebenfalls immer zunehmen, und dass die Schussweiten von 45° bis 90° immer abnehmen, weil die Sinus von $2. 45^\circ$ bis $2. 90^\circ$ ebenfalls immer abnehmen. Bei 45° wird man demnach die grösste Schussweite erreichen.

4) Bei gleicher Ladung und verschiedener Elevation verhalten sich die Flugzeiten zweier Bomben, wie die Sinus der Elevationswinkel.

Ist nämlich die Flugzeit bei ϑ° Elevation t Sekunden, und bei ϑ'° Elevation t' Sekunden, so ist $t = \frac{g \sin \vartheta}{\frac{1}{2} g}$ und $t' = \frac{g \sin \vartheta'}{\frac{1}{2} g}$, somit verhält sich,

$$t : t' = \frac{g \sin \vartheta}{\frac{1}{2} g} : \frac{g \sin \vartheta'}{\frac{1}{2} g}, \text{ oder}$$

$$t : t' = \sin \vartheta : \sin \vartheta'.$$

5) Bei gleicher Elevation und verschiedener Ladung verhalten sich die Schussweiten wie die Quadrate der Flugzeiten.

Es ist nämlich $t^2 = \frac{x \cdot \tan \vartheta}{\frac{1}{2} g}$, somit verhalten sich die Flugzeiten t und t' zweier Bomben, wie die Quadratwurzeln aus den Produkten der Schussweiten x und x' in die Tangente des Elevationswinkels. Es verhält sich daher:

$$t^2 : t'^2 = \frac{x \cdot \tan \vartheta}{\frac{1}{2} g} : \frac{x' \cdot \tan \vartheta'}{\frac{1}{2} g}, \text{ woraus}$$

$$t : t' = \sqrt{\frac{x \cdot \tan \vartheta}{\frac{1}{2} g}} : \sqrt{\frac{x' \cdot \tan \vartheta'}{\frac{1}{2} g}}.$$

Hieraus folgt, dass bei gleichen Richtungswinkeln, die Schussweiten durch Vermehrung der Ladung zunehmen müssen; das Gesetz aber, worauf diese Zunahme beruht, lässt sich nicht genau angeben. Annäherungsweise findet man: dass sich die mittleren Schussweiten, bei kleinen Ladungen wie die zweiten Potenzen der Ladungen; — bei mittleren Ladungen wie die $\frac{3}{2}$ Potenzen der Ladungen; — bei starken Ladungen wie die Ladungen selbst verhalten. —

Zur Bestimmung der Ladungen für die Schussweiten des 50 lb Mörsers wurde gefunden: dass

sich die Schussweiten wie die 1,31 Potenzen der Ladungen verhalten, oder

$$x : x' = 1^{1,31} : 1'^{1,31}.$$

Es ist nämlich bekannt, dass mit Pulver, dessen Tragweite 780 Schweizerfuss beträgt, mit dem 50 lb Mörser, bei 42° Elevation und einer Ladung von 9,6 Loth, die Schussweite von 280 Schritt

»	»	19,2	»	»	»	»	720	»
»	»	28,8	»	»	»	»	1192	»
»	1 lb	6,4	»	»	»	»	1744	»

erreicht wurde, was im Mittel die Verhältnisspotenz $= 1,31$ ergiebt. Es verhält sich, um ein Beispiel anzuführen:

$$9,6^y : 38,4^y = 280 : 1744.$$

$$y \log 38,4 - y \log 9,6 = \log 1744 - \log 280.$$

$$y (\log 38,4 - \log 9,6) = \log 1744 - \log 280.$$

$$y = \frac{\log 1744 - \log 280}{\log 38,4 - \log 9,6} = 1,31.$$

Mittelst dieser Verhältnisspotenz wurde die nachstehende Tafel zur Bestimmung der Pulverladung oder der Schussweite berechnet, welche die Verhältnisszahlen von 1 Loth bis auf 2 lb Ladung angiebt.

T a f e l

zur Bestimmung der Pulverladung oder der Schussweite bei gleicher Elevation.

Ladung. flb Loth.	Verhätt- nisszahl.	Ladung. flb Loth.	Verhätt- nisszahl.	Ladung. flb Loth.	Verhätt- nisszahl.	Ladung. flb Loth.	Verhätt- nisszahl.	Ladung. flb Loth.	Verhätt- nisszahl.
1	1,07	17	43,67	1	104,11	1	174,75	17	174,75
2	2,65	18	47,06	1	108,27	1	179,43	18	179,43
3	4,50	19	50,51	1	112,46	1	184,15	19	184,15
4	6,58	20	54,03	1	116,68	1	188,89	20	188,89
5	8,79	21	57,59	1	120,95	1	193,67	21	193,67
6	11,16	22	61,21	1	125,25	1	198,47	22	198,47
7	13,66	23	64,88	1	129,58	1	203,30	23	203,30
8	16,27	24	68,60	1	133,95	1	208,15	24	208,15
9	18,98	25	72,37	1	138,36	1	213,03	25	213,03
10	21,79	26	76,18	1	142,79	1	217,94	26	217,94
11	24,69	27	80,05	1	147,26	1	222,88	27	222,88
12	27,67	28	83,95	1	151,77	1	227,84	28	227,84
13	30,73	29	87,90	1	156,30	1	232,83	29	232,83
14	33,86	30	91,89	1	160,87	1	237,84	30	237,84
15	37,06	31	95,93	1	165,46	1	242,88	31	242,88
16	40,33	1	100,00	1	170,09	2	247,94	»	247,94

Beispiel: Der 50 lb Mörser ergiebt mit 17 Loth Ladung und 42° Elevation eine Schussweite von 600 Schritt; welche Ladung ist erforderlich um bei gleicher Elevation eine Schussweite von 1100 Schritt zu erreichen?

$$600 : 1100 = 43,67 : x.$$

$$x = \frac{1100 \cdot 43,67}{600} = 80,06 = 27 \text{ Loth},$$

weil 43,67 die Verhältnisszahl von 17 Loth, und 80,05, die dem gefundenen Werthe von $x = 80,06$ zunächst entsprechende Verhältnisszahl ist.

Beispiel: Der 50 lb Mörser ergiebt mit 22 Loth Ladung und 60° Elevation eine Schussweite von 700 Schritt; welshe Schussweite wird mit 1 lb 19 Loth bei gleicher Elevation erreicht?

$$61,21 : 184,15 = 700 : x.$$

$$x = \frac{184,15 \cdot 700}{61,21} = 2105.$$

weil 61,21 die Verhältnisszahl von 22 Loth, und 184,15 die Verhältnisszahl von 1 lb 19 Loth ist.

6) Der höchste Punkt der Flugbahn liegt senkrecht über der Mitte der Schussweite; der aufsteigende und der niedersteigende Theil sind von gleicher Länge, so wie auch der Einfallswinkel und der Erhöhungswinkel sich gleich sind.

Bekanntermassen besteht die Flugbahn, wenn sie durch eine Horizontale abgeschnitten wird, aus zwei gleichen Theilen, wovon man den einen den aufsteigenden Theil, den andern den

niedersteigenden Theil nennt. Aus diesem ergibt sich, dass die grösste Höhe in der Mitte der Bahn ist, und dass somit der Einfallswinkel gleich ist dem Richtungswinkel, respektive Erhöhungswinkel.

Wenn x die unbekannte Grösse ist, so kann jede vollständige quadratische Gleichung auf folgende Form reduziert werden:

$$x^2 = p x + q,$$

wobei p und q bekannte Grössen sind, und positiv oder negativ sein können. Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$x^2 - p x = q.$$

Ferner:

$$x^2 - p x + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} + q.$$

Nun ist

$$x^2 - p x + \frac{p^2}{4} = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \text{ wenn } x - \frac{p}{2} \text{ mit}$$

$x - \frac{p}{2}$ multipliziert wird.

Somit hat man:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q, \text{ woraus folgt:}$$

$$x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + q\right)} \text{ und}$$

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + q\right)}.$$

Die Gleichheit des aufsteigenden und des nie-

dersteigenden Theils der Flugbahn wäre nun analytisch zu beweisen, um zu zeigen, dass die gleichen Höhen $h k$ und $c' d$, gleich weit von dem unveränderlichen Punkte f entfernt sind, oder dass $f h = f d$ sei. Man gelangt hierzu, wenn die Grössen $a h$ und $h k$ als zwei veränderliche von einander abhängende Grössen angenommen werden, und ein Ausdruck für $a h$ gesucht wird. $a h = a f \pm f h$, wobei $a f$ unveränderlich ist, welchen Werth man auch der Grösse $h k$ giebt. Hieraus kann man schliessen, dass die Punkte h und d von einem unveränderlichen Punkt f gleich weit entfernt seien, also auch die Höhen $h k$ und $c' d$. Um die Höhe $h k = y$ in die Formel aufzunehmen, muss das Geschoss nicht bis auf die Horizontale $a m$ fallen, weil sonst $y = 0$ würde, sondern im Punkte k aufschlagen. Man erhält dann folgende Gleichungen.

$$\text{I. } ah = x = t. c. \cos \vartheta$$

$$\text{II. } t^2 b'c' = \frac{1}{2} g t^2 = x. \tan \vartheta. - y.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist nun x zu bestimmen, was durch solche Grössen geschehen muss, die in k und c' gleichen Werth haben, also durch Winkel ϑ , $a b' = c$,

$$b'c' = \frac{1}{2} g \text{ und}$$

$$hk = y,$$

zu welchem Ende die veränderliche Grösse t eliminiert werden muss:

$$t = \frac{x}{c \cos \vartheta}.$$

Diesen Werth von t in die Gleichung (II) gesetzt,

$$= \frac{x^2 \frac{1}{2} g}{c^2 \cos^2 \vartheta} = x \cdot \tan \vartheta - y,$$

woraus

$$x^2 = \frac{c^2 \cos^2 \vartheta \tan \vartheta}{\frac{1}{2} g} x - \frac{c^2 \cos^2 \vartheta y}{\frac{1}{2} g} \text{ und}$$

$$x = \frac{c^2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{g} \pm \sqrt{\frac{c^4 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta}{2 g^2} - \frac{c^2 \cos^2 \vartheta y}{\frac{1}{2} g}}$$

oder

$$x = \frac{c^2 \sin 2 \vartheta}{2 g} \pm \frac{c^2 \cos \vartheta}{g} \sqrt{c^2 \sin^2 \vartheta - 2 g y}.$$

Dieser Ausdruck von $a h = x$ ist nun mit der oben verlangten Form $a h = a f \pm f h$ übereinstimmend. Man erhält für

$$a f = \frac{c^2 \sin 2 \vartheta}{2 g} \text{ und für}$$

$$f h = \frac{c^2 \cos \vartheta}{g} \sqrt{c^2 \sin^2 \vartheta - 2 g y}.$$

Davon ist der erste Theil nämlich

$$a f = \frac{c^2 \sin 2 \vartheta}{2 g} \text{ unveränderlich, welchen Werth}$$

y haben mag, da diese Grösse nicht in diesem Ausdruck erscheint und die hier vorkommenden Grössen: $\sin 2 \vartheta$, c und $\frac{1}{2} g$, bei der gleichen Bahn unveränderliche und von y unabhängige Grössen sind. $a f$ wäre somit unveränderlich, der Punkt f demnach ein unveränderlicher Punkt.

Bei Bestimmung der Punkte d und h sind die Entfernungen $\pm f h$ oder

$$\pm \frac{c^2 \cos \vartheta}{g} \sqrt{c^2 \sin^2 \vartheta - 2 g y} \text{ immer vom glei-}$$

chen Punkt aus zu messen; es stehen folglich die gleichen Höhen $h k$ und $c' d$ auf gleiche Entfernungen $f h$ und $d f$ vom unveränderlichen Punkte f . Der Punkt f ist demnach der Mittelpunkt der horizontalen Schussweite $a c$, wodurch bewiesen wäre, dass die Flugbahn, wenn sie durch eine Horizontale abgeschnitten wird, aus zwei gleichen Theilen bestehe. Die Linie $f c'''$ nennt man die Achse der Parabel, weil auf beiden Seiten derselben Entfernungen und Höhen gleich sind. Dass der eine Theil der Flugbahn ein aufsteigender, der andere ein niedersteigender sei, ergibt sich auch dadurch: dass je kleiner die Abstände $f h$ und $d f$ sind, desto grösser die Höhen $h k$ und $c' d$ werden, woraus hervorgeht: dass die Flugbahn von beiden Enden gegen die Mitte steigt, und die grösste Höhe derselben über dem Mittelpunkt der horizontalen Schussweite sich befindet. — Aus dem Vorigen lässt sich ebenfalls auch beweisen, dass der Einfallswinkel gleich sei dem Erhöhungswinkel, weil der aufsteigende und der niedersteigende Theil der Flugbahn einander vollkommen gleich sind. —

7) Die grössten Höhen, welche die Geschosse auf ihrer Bahn erreichen, verhalten sich wie die Quadrate der Sinus der Elevationswinkel.

$$f c''' = \frac{c^2 \sin^2 \vartheta}{2 g}.$$

Die grösste Höhe der Flugbahn $f c'''$ sei durch die Formel $\frac{c^2 \sin^2 \vartheta}{2g}$ ausgedrückt, woraus leicht zu ersehen ist, mit welchem Elevationswinkel die Geschosse am höchsten steigen. Dieses geschieht nämlich wenn $\frac{c^2 \sin^2 \vartheta}{2g}$ den grössten Werth erhält, in welchem Falle dann

$$c^2 \sin^2 \vartheta - 2g y = 0 \text{ wird.}$$

Bei dem Ausdruck $\frac{c^2 \sin^2 \vartheta}{2g}$ ist bei gleicher Ladung nur $\sin^2 \vartheta$ veränderlich; es wird also $\frac{c^2 \sin^2 \vartheta}{2g}$ am grössten sein, wenn $\sin^2 \vartheta$ am grössten wird. Den grössten Werth von $\sin^2 \vartheta$ erhält man, wenn $\angle \vartheta = 90^\circ$ ist, dann wird $\sin^2 \vartheta = \text{Rad}^2 = 1^2 = 1$, folglich muss die grösste Höhe $H = \frac{c^2}{2g}$, der Werth von $a f = 0$, und die Schussweite $a c$ auch $= 0$ werden.

Wenn nun für $a c$ zweimal der Werth von $a f$, und für $\frac{c^2}{2g}$, H in die Gleichung gesetzt wird, so erhält man für den Werth von $a c$ oder der Schussweite $= 2 H \sin 2 \vartheta$, und für $f c'''$ oder die Schusshöhe $= H \sin^2 \vartheta$.

Wenn $\angle \vartheta = 15^\circ$ ist, so wird $\angle 2 \vartheta = 30^\circ$; $\sin 2 \vartheta = \sin 30^\circ = \frac{\text{Rad}}{2}$, also die Schussweite $a c = H =$ der Schusshöhe von 90° .

Wenn $\angle \vartheta = 75^\circ$ ist, so wird $\angle 2 \vartheta = 150^\circ$;
 $\sin 2 \vartheta = \sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 150^\circ) = \sin$
 $30^\circ = \frac{\text{Rad}}{2}$, also $a c$ wieder $= H =$ der Schuss-
höhe von 90° .

Wenn $\angle \vartheta = 30^\circ$ ist, so wird $f c''' = \frac{H}{4}$. Es ist
also bei 30° die grösste Höhe der Bahn $=$ dem
vierten Theil der Schusshöhe von 90° , oder $=$ dem
vierten Theil der Schussweite von 15° oder 75° .
Wenn $\angle \vartheta = 45^\circ$ ist, so wird $\angle 2 \vartheta = \text{Rad}$
 $= 1$; ferner $\sin^2 \vartheta = \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2}$; folglich $a c =$
 $2 H$, und $f c''' = \frac{H}{2}$. Es ist also die Schuss-
weite bei 45° zweimal so gross als die Schusshöhe
von 90° und zweimal so gross als die Schussweite
von 15° und 75° ; und es ist bei dieser Elevation
die Schusshöhe gleich der Hälfte der Schusshöhe
von 90° , oder gleich der Hälfte der Schussweite
von 15° und 75° ; folglich ist bei 45° die Schuss-
weite viermal so gross als die Schusshöhe.

Wenn $\angle \vartheta = 60^\circ$ ist, so wird $\sin 2 \vartheta = \frac{3}{4}$
 $R^2 = \frac{3}{4}$; folglich $f c''' = \frac{3}{4} H$. Demnach ist
die grösste Höhe bei $60^\circ = \frac{3}{4}$ der Schusshöhe von
 90° , oder $= \frac{3}{4}$ der Schussweite von 15° und 75° .

Diese einfachen Lehrsätze der Parabel können
in der Praxis beim Schiessen mit Mörsern
mit Vorthail gebraucht werden, indem die zum
Gewicht des Geschosses verhältnissmässig kleinen

Pulverladungen, diesem eine geringe Anfangsgeschwindigkeit ertheilen. Die Erfahrung zeigt auch wirklich, dass sich bei gleichen Pulverladungen, die Schussweiten wie die Sinus der doppelten Elevationswinkel, und die Flugzeiten wie die Sinus der Elevationswinkel verhalten.

Die Möglichkeit aber, dass dieses Statt finden könne, obschon die Flugbahn eines Geschosses im luftgefüllten Raume nie eine Parabel bilden wird, erklärt sich dadurch: dass die Anfangsgeschwindigkeiten der Bomben weit geringer als diejenigen der Vollkugeln sind; und dass die Flugbahnen zweier Bomben, die unter nicht allzusehr verschiedenen Elevationswinkeln mit gleicher Ladung geschossen werden, ähnliche Veränderungen in Rücksicht der parabolischen Form durch den Widerstand der Luft erleiden.

Vierter Abschnitt.

Von der Flugbahn der Geschosse im luftgefüllten Raume.

Allgemein wird angenommen, dass die Grösse des Widerstandes der Luft gegen eine sich darin bewegend Kugel gleich sei: dem Gewichte einer Luftsäule, welche die grösste Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und

$\frac{3}{5}$ der zu ihrer Geschwindigkeit gehörenden Fallhöhe zur Höhe hat.

Es sei π das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser;

d die Dichtigkeit der Luft;

d' die Dichtigkeit des Geschosses;

a der Durchmesser des Geschosses;

c die Geschwindigkeit;

M die Masse der Kugel $= \frac{a^3 \pi d'}{6}$;

g die Beschleunigung der Schwere;

R die Grösse des Widerstandes der Luft;

so wird der Widerstand gleich sein:

$$R = \frac{3}{5} \cdot \frac{\pi a^2 d g}{4} \cdot \frac{c^2}{2 g}.$$

folglich

$$M R = \frac{\pi a^3 d' R}{6} \text{ oder}$$

$$M R = \frac{3}{5} \cdot \frac{\pi a^2 d}{4} \cdot \frac{c^2}{2} \text{ weil } g \text{ im Zähler und}$$

Nenner des zweiten Gliedes verschwindet.

Wenn diese beiden Werthe von

$$M R = \frac{\pi a^3 d' R}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\pi a^2 d}{4} \cdot \frac{c^2}{2}$$

ausgeglichen werden, so erhält man:

$$R = \frac{6}{\pi a^3 d'} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{\pi a^2 d}{4} \cdot \frac{c^2}{2} \text{ woraus}$$

$$R = \frac{9}{20} \cdot \frac{c^2}{D a}, \text{ wobei } D = \frac{d'}{d} \text{ die Dichtigkeit}$$

des Geschosses angiebt, wenn die Dichtigkeit der Luft als Einheit angenommen wird.

Die Grösse des Widerstandes besteht folglich: aus $\frac{3}{5}$ des Quadrats der Geschwindigkeit, — aus der Grösse der Fläche, welche dem Widerstande entgegengesetzt wird, und — aus der Dichtheit des flüssigen Mittels.

Je geschwinder ein Körper sich bewegt, desto mehr Theilen des Mittels muss er Bewegung mittheilen, und mit desto grösserer Geschwindigkeit jeden der Theile forttreiben. Würde seine Geschwindigkeit doppelt so gross; so müsste er doppelt so vielen Theilen eine doppelt so grosse Geschwindigkeit mittheilen, also einen viermal grösseren Widerstand erleiden. Der Widerstand wächst demnach wie die Quadrate der Geschwindigkeiten.

Der Widerstand muss ferner (bei übrigens gleichen Umständen) desto grösser sein, je grösser die nach vorwärts gerichtete Fläche des Körpers ist, denn je grösser die Fläche ist, desto grösser ist auch die in einer bestimmten Zeit vorwärts getriebene Masse des flüssigen Mittels.

Wenn zwei Körper A und B eine ähnliche Gestalt haben, und sich in gleicher Lage und mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, so verhält sich der Widerstand für A zu dem für B, wie der auf der Richtung der Bewegung senkrechte Durchschnitt der Körper.

Da die bewegende Kraft eines Körpers nicht nur von seiner Geschwindigkeit, sondern auch von

seiner Masse abhängt, so folgt daraus: dass Körper von geringerer Masse den Widerstand des Mittels schwerer überwinden können, als Körper von grösserer Masse, weil sich die bewegenden Kräfte wie die Produkte der Massen in die Geschwindigkeiten, oder wie die Kubi der Durchmesser in die Geschwindigkeiten; hingegen die Widerstandskräfte, wie die zweiten Potenzen der Produkte der Geschwindigkeiten in die Durchmesser verhalten.

Es verhält sich somit die Wirkung der Widerstandes der Luft umgekehrt wie die Schwere der Körper.

Wenn der Widerstand der Luft so vielmal kleiner ist, so vielmal das Gewicht der Körper grösser ist, so folgt daraus: dass wenn die Körper ähnlich sind, bei den grössern der Widerstand der Luft weniger wirkt, obschon die grösseren mehr Oberfläche haben; weil die Oberflächen nicht so stark zunehmen wie die Gewichte; denn z. B. eine Kugel von zweimal so viel Durchmesser hat nur viermal so viel Oberfläche, hingegen achtmal so viel Gewicht, oder allgemein: es verhalten sich die Oberflächen der Kugeln wie die Quadrate der Durchmesser, die Gewichte aber wie die Kubi der Durchmesser.

Macht man C oder die bewegeude Kraft =

$$\frac{20}{9} a D,$$

so wird $R = \frac{c^2}{C}.$

Setzt man ferner statt dem als bestimmt angenommenen Widerstandskoeffizienten $\frac{3}{5}$ oder 0,6, den unbestimmten n in die Gleichung, so wird

$$R = \frac{3 n}{4 a D} c^2,$$

woraus

$$2 C = \frac{8 a D}{3 n}$$

und $C = \frac{4 a D}{3 n}$, und endlich $R = \frac{c^2}{C}$.

Der Widerstandskoeffizient n ändert aber mit den Anfangsgeschwindigkeiten, so dass sein Werth $= 0,6$ für Geschwindigkeiten von 1300 bis 1700 Fuss, mit 1,0126 multipliziert werden muss. Nach diesem wird

$$C = \frac{4}{3} \cdot \frac{D \cdot a}{0,60756} \text{ und}$$

$$R = \frac{3}{4} \cdot \frac{0,60756}{D \cdot a} c^2,$$

wovon die Werthe in der folgenden Tabelle angegeben sind, und wobei die Dichtigkeit des Gusseisens zu 7,069, die Dichtigkeit der Luft $= 0,001295535$ angenommen wurde.

Um die Dichtigkeit der Hohlgeschosse zu bestimmen, muss zuerst der Inhalt an Gusseisen gesucht werden.

Es sei A der Durchmesser der Granate, h die Eisenstärke, so ist der Durchmesser des hohlen Raumes $A - 2 h$; ferner der Inhalt einer massiven Kugel vom Durchmesser der Granate $=$

$$\frac{A^3 \pi}{6}$$

und der Inhalt des hohlen Raumes:

$$= \pi \left(\frac{A - 2h}{6} \right)^3.$$

Ferner sei die Höhe eines abgeschnittenen Kegels von der Grösse des Brandloches $= k$, der äussere Halbmesser des Brandloches $= R$, der innere Halbmesser des Brandloches $= r$, die Höhe des äussern Kugelabschnittes $= H$, die Höhe des innern Kugelabschnittes $= H'$, so ist der Inhalt an Gusseisen =

$$\frac{A^3 \pi}{6} - \left[\left(\frac{A - 2h}{6} \right)^3 \pi + \frac{1}{3} k \pi (R^2 + r^2 + Rr) + \frac{H}{2} \pi \left(R^2 + \frac{H^2}{3} \right) - \frac{H'}{2} \pi \left(r^2 + \frac{H'^2}{3} \right) \right].$$

In der Praxis ist übrigens die Formel:

$$\frac{1}{6} [A^3 - (A - 2h)^3] \pi$$

für den Inhalt an Gusseisen hinlänglich genau.

Um nun die Dichtigkeit der mit Pulver geladenen Granate zu bestimmen, bezeichne V deren Volumen; G das Gewicht; ferner d' die Dichtigkeit des Gusseisens; v den Volumen des Gusseisens; G' das Gewicht des Gusseisens, oder das Gewicht der leeren Granate; endlich d''' die Dichtigkeit des Pulvers mit den Zwischenräumen $= 0,94$; v' den Volumen der Sprengladung; G'' das Gewicht der Sprengladung, so ist:

$$d'' V = G$$

$$d' v = G'$$

$$d''' v' = G''$$

somit $d'' V = d' v + d''' v'$,

folglich

$$d'' = \frac{d' v + d''' v'}{V}.$$

Den Werth von d'' dividirt durch die Dichtigkeit der Luft, oder $\frac{d''}{d} = D =$ der Dichtigkeit der gefüllten Granate, wenn die Dichtigkeit der Luft als Einheit angenommen wird.

Tafel für die Werthe von D, C und R.

Geschosse.	Durchmesser in Fussen.	Eisenstärke in Fussen.	Dichtigkeit = D.	Bewegende Kraft = C.	Widerstand = R. 0,000.
12lb Kugel	0,3875	»	5456,44	4640	2155
6lb Kugel	0,3085	»	5456,44	3694	2707
24lb Granate	0,5450	0,090	4453,20	5326	1877
12lb Granate	0,4325	0,082	4327,17	4107	2435
8lb Gebirgsgranate	0,3875	0,063	3556,52	3024	3306
50lb Bombe	0,7370	0,090	3237,21	5236	1910

Die Grösse $\frac{3 n c^2}{8 a D}$ in die Formel für die ungleichförmige Bewegung substituirt, giebt,

$$g c t = g t V - \frac{3 n x}{4 a D}.$$

Um den hierbei sich ergebenden natürlichen

Logarithmus zu verwandeln multipliziert man ihn mit 0,43429448.

Es sei m die Zahl von welcher der gemeine Logarithmus =

$$\frac{3}{4} \frac{n}{a} \frac{x}{D} \cdot 0,43429448$$

ist, oder

$$\log m = \frac{x}{C} \cdot 0,43429448.$$

Man erhält nun die der Kugel übrig bleibende Geschwindigkeit c , auf eine gegebene Entfernung x vom Geschütze, wenn die Anfangsgeschwindigkeit V , durch den Werth von m dividirt wird.

$c = \frac{V}{m}$ oder $\log c = \log V - \log m$, folglich $V - \frac{V}{m} =$ der Verminderung der Geschwindigkeit durch den Widerstand der Luft, während dem das Geschoss den Raum x durchläuft.

Ist die der Kugel übrig bleibende Geschwindigkeit auf eine gegebene Entfernung bekannt, so findet man den Werth der Anfangsgeschwindigkeit, $V = m c$.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit bekannt, so findet man die Zeit, welche die Kugel braucht um einen gegebenen Raum zu durchlaufen,

$$t = \frac{C}{V} (m - 1).$$

Ist die Zeit und der Raum bekannt, so findet man die Anfangsgeschwindigkeit,

$$V = \frac{C}{t} (m - 1)$$

Ist die Zeit und die Anfangsgeschwindigkeit bekannt, so findet man den während dieser Zeit durchlaufenen Raum,

$$m = \frac{V t}{C} + 1.$$

oder

$$x = \frac{C \log \left(\frac{V t}{C} + 1 \right)}{0,43429448.}$$

But en blanc.

Es sei x der Theil der Flugbahn der Kugel von der Mündung bis zum Punkte, wo die Flugbahn die Richtungslinie zum zweitenmal schneidet; V die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel; m die Zahl von welcher der natürliche Logarithmus $\frac{x}{C}$, oder der gemeine Logarithmus —

$$\frac{x}{C} \cdot 0,43429448 \text{ ist.}$$

Die Zeit um den Raum x zu durchlaufen sei

$$t = \frac{C}{V} (m - 1).$$

Anstatt diesem Ausdruck muss nun für die gleiche Zeit ein anderer gesucht werden.

Die Richtungslinie $e f b c$ (Fig. V.) sei horizontal; c der zweite Durchschnittspunkt dieser Linie mit der Flugbahn. Die Senkrechte $d c$ sei die Höhe

von der die Kugel vermöge ihrer Schwere, in der nämlichen Zeit fällt, in der sie den Weg von g nach d zurücklegt. Wenn nun die Horizontale g h durch den Mittelpunkt der Mündung geführt wird, o ist der Unterschied zwischen d c und d h in der Wirklichkeit nicht bedeutend; es kann somit die Fallhöhe ohne grossen Irrthum durch d h ausgedrückt werden.

Im Dreieck d g h ist $\frac{d h}{g h} = \text{tang } d g h$ und $d h = g h. \text{ tang } d g h$, oder wenn der Visierwinkel $b = f b g = d g h$, und x die Entfernung $= g h$ benannt wird,

$$d h = x. \text{ tang } b.$$

Die Zeit des Falls d h wäre auszudrücken durch

$$\sqrt{\frac{s}{\frac{1}{2} g}} = \sqrt{\frac{x. \text{ tang } b}{16,3394}}.$$

Diese Zeit ist gleich für den zurückzulegenden Weg g h, daher

$$\sqrt{\frac{x. \text{ tang } b}{16,3394}} = \frac{C}{V} (m - 1),$$

woraus

$$\frac{V^2 \text{ tang } b}{16,3394 C^2} = \frac{(m - 1)^2}{x}.$$

Nun aber ist m eine Grösse, welche $\frac{x}{C}$ zum natürlichen Logarithmus hat; wenn e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems ist, so wird

$$m = e^{\frac{x}{C}}$$

und nach den Eigenthümlichkeiten dieser Zahl,

$$m = 1 + \frac{x}{C} + \frac{x^2}{2 C^2} + \frac{x^3}{6 C^3} \text{ u. s. w.,}$$

folglich

$$m - 1 = \frac{x}{C} + \frac{x^2}{2 C^2} + \frac{x^3}{6 C^3} \text{ u. s. w.,}$$

woraus

$$\frac{(m - 1)^2}{x} = \frac{x}{C^2} + \frac{x^2}{C^3} \text{ u. s. w.,}$$

wobei die folgenden Ausdrücke füglich weggelassen werden dürfen, da die Potenz von C in jedem Ausdruck grösser ist, als die von x , und wie im vorliegenden Fall bei eisernen Kugeln, die Werthe von C in einem weit grösseren Verhältniss, als jene von x wachsen.

Man hat somit

$$\frac{(m - 1)^2}{x} = \frac{V^2 \tan b}{16,3394 C^2} = \frac{x}{C^2} + \frac{x^2}{C^3} \dots$$

woraus

$$x^2 + C x = \frac{C V^2 \tan b}{16,3394}.$$

Diese Formel schliesst alles in sich, was bei der Anwendung des Visierschusses berücksichtigt werden muss. Mit Hülfe derselben lassen sich auch die drei wesentlichsten Aufgaben der ballistischen Theorie lösen.

$$V = \sqrt{\frac{16,3394}{\tan b} \left(\frac{x^2}{C} + x \right)}$$

$$\tan b = \frac{16,3394}{V^2} \left(\frac{x^2}{C} + x \right)$$

$$x = C \left[\sqrt{\left(\frac{V^2 \tan b}{16,3394 C} + \frac{1}{4} \right)} - \frac{1}{2} \right]$$

Der der Tangente b (Fig. VI.) entsprechende Aufsatz H ist dann =

$$L \cdot \tan b - (R - r),$$

wobei L die Länge der Geschützröhre vom hinteren Rande der Bodenplatte bis zum höchsten Punkte des Kopfes, — R der Halbmesser der Bodenplatte, — r der Halbmesser des Kopfwulstes, — und $(R-r)$ den Unterschied dieser beiden Halbmesser oder die Metallvergleichung bezeichnet,

weil $L : H = \text{Rad} : \tan b$ sich verhält.

Wird der Aufsatz negativ, so erhält man die demselben entsprechende Richtung unter das Ziel (Fig. VII.),

$$z = \frac{H \cdot x}{L},$$

weil $L : H = x : z$ sich verhält. —

But en terre.

Bezeichnet die Visierschussweite nicht den zweiten Durchschnittspunkt der Richtungslinie mit der Flugbahn, sondern den ersten Aufschlag der Kugel, so pflegt man dieselbe **But en terre** zu nennen. —

Aus den zahlreichen eidgenössischen Schiessversuchen mit 12 lb und 6 lb Kanonen ergiebt sich, dass auf einem horizontalen Terrain, bei der Richtung über die höchsten Punkte des Metalls, auf ein im Horizont des Geschützes sich befinden-

des Ziel, mit gewöhnlicher Feldladung, der erste Aufschlag der Kugel oder die Schussweite des But en terre bei der 12 lb Kanone 938 Schritte, bei der 6 lb Kanone 866 Schritte beträgt. Angenommen g (Fig. VIII.) sei der zu treffende Punkt und $b g' = 866$ Schritte, um die 6 lb Kanone als Beispiel zu nehmen, so ist:

$$\text{tang } b = \frac{16,3394}{V^2} \left(\frac{x^2}{C} + x \right) = 1^\circ. 10'. 52'' = 10''' , 898 - (R - r) = 10''' , 898 - 8''' , 6 = 2''' , 298 = 2''' , 3.$$

Der Punkt aber, wo die Kugel treffen soll, ist in f ; mit dem Aufsatz von $2''' , 3$, trifft sie daher um $g f$ zu hoch; es muss dessnachen von dem obigen Winkel von $1^\circ. 10'. 52''$, noch derjenige, welcher $\frac{f g}{h g}$, oder $\frac{f g'}{b g'}$ zur Tangente hat, abgezogen werden.

Es sei bei wagrechter Richtung der Visierlinie, die Höhe der Mittellinie der Bohrung an der Mündung $= 3', 8375$, so ist $\text{tang } b' =$

$$\frac{f g}{h g} = \frac{f g'}{b g'} = \frac{a b}{b g'} = 0^\circ. 6'. 6''.$$

Diesen Werth von dem ersteren abgezogen, bleibt $1^\circ. 4'. 46''$. Es wäre folglich der natürliche Visierwinkel des But en terre $=$

$$1^\circ. 4'. 46'', \text{ oder } (R' - r') = 9''' , 958.$$

T a f e l
für die Grösse der Anfangsgeschwindigkeiten der
Geschosse.

Kaliber und Art der Geschosse.	Ladung in Lothen.	Anfangs- geschwindigkeit in Schweizerfussen.
12 lb Kugel	120	1650
» »	60	1170
6 lb Kugel	60	1650
» »	30	1170
24 lb Granate	44	728
» »	32	619
» »	20	491
12 lb Granate	22	706
» »	16	600
» »	10	476
8 lb Gebirgsgranate	17	766

Bei verschiedenen Kalibern einer Geschützgat-
tung ist bei gleicher Stärke des Pulvers das Ge-
wicht der Ladungen, dividirt durch das Gewicht
der Geschosse, den Quadraten der Geschwindig-
keiten proportional. Es sei V die Geschwindig-
keit, L die Ladung, P das Gewicht des einen Ge-
schosses. Bei einem andern Geschosse bezeichne
 V' die Geschwindigkeit, L' die Ladung, P' das
Gewicht desselben, so verhält sich :

$$V^2 : V'^2 = \frac{L}{P} : \frac{L'}{P'},$$

somit

$$V = V' \sqrt{\frac{L P'}{L' P}}.$$

Bei ungleicher Stärke des Pulvers verhalten sich die durch den Probemörser erhaltenen Tragweiten, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Es sei V die durch obige Gleichung erhaltene Geschwindigkeit, s die Tragweite des Pulvers; ferner sei V'' die Geschwindigkeit eines Pulvers dessen Tragweite durch s'' bezeichnet wird, so verhält sich:

$$s : s'' = V^2 : V''^2,$$

somit

$$V'' = V \sqrt{\frac{s''}{s}}.$$

T a f e l

über die äussere Länge der Geschützröhren, und den Unterschied der Grösse des Halbmessers der Bodenplatte und desjenigen des Kopfwulstes.

Kaliber der Geschützröhren.	Äussere Länge = L in Fussen.	Unterschied der Halbmesser = $R - r$ in Fussen.
12 lb Kanone	6,535	0,1065
6 lb Kanone	5,285	0,0860
24 lb Haubitze	2,990	0
12 lb Haubitze	2,817	0
8 lb Gebirgshau- bitze.	2,866	0,0250

Anhang.

Verschiedene Notizen.

A. Schweizerische Masse und Gewichte.

Längenmasse.

Ein Schweizerfuss ($= \frac{3}{10}$ Meter) = 10 Zolle
= 100 Linien = 1000 Striche.

Ein Schweizerklafter = 6 Schweizerfuss.

Eine Schweizerruthe = 10 Schweizerfuss.

Ein Artillerieschritt = 2, 5 Schweizerfuss.

Eine Wegstunde = 16000 Schweizerfuss = 6400
Artillerieschritten.

Beständige und zu addirende Logarithmen zur Reduktion:

der Meter in Schweizerfuss	0,5228788.
der Meter in Schweizerklafter	9,7447275.
der französischen Klafter in Schweizerklafter	0,0345476.
der französischen Fuss in Schweizerfuss	0,0345476.
der französischen Zoll in Schweizerzoll	9,9553670.

und umgekehrt:

der Schweizerfuss in Meter	0,4771212.
der Schweizerklafter in Meter	0,2552725.

der Schweizerklafter in franz. Klafter	9,9654524.
der Schweizerfuss in franz. Fuss . .	9,9654524.
der Schweizerzoll in franz. Zoll . .	0,0446330.

Flächenmasse.

Ein Quadratfuss	= 100 Quadratfuss.
Ein Quadratklafter	= 36 Quadratfuss.
Eine Quadratruthe	= 100 Quadratfuss.
Eine Juchart	= 40000 Quadratfuss = 400 Quadratruthen.
Eine Quadratstunde	= 256,000000 Quadratfuss = 6400 Jucharten.

Kubische Masse.

Ein Kubikfuss	= 1000 Kubikzoll.
Ein Kubikklafter	= 216 Kubikfuss.

Hohlmasse für trockene Früchte.

Ein Viertel (Quarteron	= 15 französische Liter)
= 10 Immi (Émines).	Das Viertel fasst genau 30 lb destillirtes Wasser bei $3\frac{1}{2}^{\circ}$ Réaumur oder dem Zustande seiner grössten Dichtigkeit.
Ein Malter	= 10 Viertel.

Hohlmasse für Flüssigkeiten.

Eine Mass (Pot	= $1\frac{1}{2}$ französische Liter).
Die Mass	fasst genau 3 lb destillirtes Wasser.
Ein Saum (Ohm)	= 100 Mass.

Gewichte.

Ein Pfund (= $\frac{1}{2}$ Kilogramm	= 500 Gramm) = 32 Loth.
Das Pfund	ist gleich dem Gewichte des

vier und fünfzigsten Theils eines Kubikfusses
Wasser im Zustande der grössten Dichtigkeit.

B. Dichtigkeit der Körper.

(Die Dichtigkeit des destillirten Wassers bei $+ 3^{\circ},5$
Réaumur ist $= 1,000$ genommen.)

Antimonium	4,450
Blei	11,330
Geschützmetall	8,789
Gusseisen	7,069
Kohle, gewöhnliche weiche Holzkohle . . .	0,360
Kupfer, gegossen	7,788
Kupfer, gehämmert	8,878
Luft, atmosphärische	0,0013
genau : 0,001295535.	
Messing	8,200
Quecksilber bei 0° Réaumur	13,598
Salpeter, kristallisirt	1,900
Schiesspulver Kanonenpulver No. 7 locker eingefüllt mit Zwischenräumen . . .	0,940
Schiesspulver ohne Zwischenräume . . .	1,783
Schwefel	1,955
Stabeisen	7,497
Stahl, gehärtet	7,818
Wasser, destillirtes	1,000
Zinn, englisches	7,291

Ein Schweizerkubikfuss destillirtes Was-
ser von $+ 3^{\circ},5$ Réaumur, wiegt 54 Schweizerpfund.

Mit diesen Gewichtszahlen sind die Dichtheiten der Körper zu multiplizieren, um das Gewicht eines Kubikfusses derselben zu erhalten.

C. Mathematische Formeln.

Längenmessung.

	Zahlen.	Logarithmen.
π , Verhältniss des Durchmessers zur Peripherie = $\frac{355}{113}$	3,1415926	0,4971499
e, Zahl von welcher der natürliche Logarithmus = 1	2,7182818	0,4342945
g, die Endgeschwindigkeit welche ein Körper nach der ersten Sekunde seines Falles im luftleeren Raume erlangt, Schweizerfuss	32,6788	1,5142661
$\frac{1}{2}g$, der Fallraum eines Körpers in der ersten Sekunde	16,3394	1,2132361

Formel für den Umfang eines Kreises = $d \pi$ oder $2 r \pi$, wobei d den Durchmesser und r den Halbmesser des Kreises bezeichnet.

Formel für die Länge eines Kreisbogens = $\frac{a \pi r}{180}$, wobei a die Anzahl der Grade des Bo-

gens und r den Halbmesser des Kreises bezeichnet.

Regelmässige Vielecke: Mittelpunktswinkel

des regelmässigen n ecks $= \frac{360^\circ}{n}$; der Poly-

gonswinkel $\frac{n-2}{n} 180^\circ$; die Seite allgemein:

$2 r \sin \frac{180^\circ}{n}$, insbesondere:

die Seite des Dreiecks $= r \sqrt{3} = 1,732 \cdot r$.

die Seite des Vierecks $= r \sqrt{2} = 1,414 \cdot r$.

die Seite des Fünfecks $= r \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = 1,175 \cdot r$.

die Seite des Sechsecks $= r$.

die Seite des Achtecks $= r \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0,765 \cdot r$.

die Seite des Zehnecks $= \frac{r}{2} (-1+\sqrt{5}) = 0,618 \cdot r$.

Flächeninhalte = F.

Eines Dreiecks = Grundlinie multipliziert mit $\frac{1}{2}$ Höhe, oder $= \frac{1}{2}$ Produkt von zwei Seiten multipliziert mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Eines Parallelogramms = Grundlinie multipliziert mit der Höhe.

Eines Trapez = $\frac{1}{2}$ Summe der parallelen Seiten multipliziert mit der Höhe.

Eines regelmässigen Vielecks = Umfang multipliziert mit $\frac{1}{2}$ Halbmesser des eingeschrie-

benen Kreises, oder $\frac{n r^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$, wobei r

der Halbmesser und n die Seitenzahl bezeichnet.

Für den Flächeninhalt der regelmässigen Vielsecke, wobei die Vielecksseite $= s$, ist F

beim Dreieck $= 0,433. s^2$.

beim Viereck $= 1,000. s^2$.

beim Fünfeck $= 1,720. s^2$.

beim Sechseck $= 2,598. s^2$.

beim Siebeneck $= 3,634. s^2$.

beim Achteck $= 4,828. s^2$.

beim Neuneck $= 6,182. s^2$.

beim Zehneck $= 7,694. s^2$.

beim Elfeck $= 9,366. s^2$.

beim Zwölfeck $= 11,196. s^2$.

Eines Kreises $= r^2 \pi$.

Eines Kreisausschnittes dessen Bogen n Grade

$$\text{hat} = \frac{r^2 \pi}{360} n = 0,0087. n r^2.$$

Eines Kreisabschnittes $= r^2 \left(\frac{\pi}{360} \cdot n - \frac{1}{2} \right.$

$$\sin n) = r^2 (0,0087 \cdot n - \frac{1}{2} \sin n).$$

Oberflächen = 0.

Eines senkrechten Prisma $=$ Umfang der Grundfläche multipliziert mit der Höhe; mehr der Summe der Grundflächen.

Eines senkrechten Cylinders $= 2 r \pi$ multipliziert mit der Achse; mehr $2 r^2 \pi$.

Einer gleichseitigen Piramide = Umfang der Grundfläche multipliziert mit $\frac{1}{2}$ Senkrechten aus der Spitze auf eine Seite der Grundfläche; mehr der Grundfläche.

Eines Kegels = $2 r \pi$ multipliziert mit $\frac{1}{2}$ Seite; mehr $r^2 \pi$.

Eines parallel abgeschnittenen Kegels = $\frac{U + u}{2}$ multipliziert mit der Seite; mehr Summe der Grundflächen.

Einer Kugel = $4 r^2 \pi = 12,56637. r^2$.

Eines Kugelabschnitts und einer Kugelzone = $2 r \pi$ multipliziert mit der Höhe; mehr Summe der ebenen Grundflächen.

Kubikinhalte = K.

Eines Prisma und Cylinders = Grundfläche multipliziert mit der Höhe = FH.

Einer Piramide oder eines Kegels = Grundfläche multipliziert mit $\frac{1}{3}$ der Höhe = F. $\frac{1}{3}$ H.

Einer parallel abgeschnittenen Piramide = $(F + f + \sqrt{F f}) \frac{1}{3}$ H.

Eines parallel abgeschnittenen Kegels = $\frac{1}{3} H \pi (R^2 + r^2 + R r)$.

Einer Kugel = $\frac{4 r^3 \pi}{3} = \frac{d^3 \pi}{6} = 4,18879. r^3 = 0,5236. d^3$.

Eines Kugelabschnittes, dessen Halbmesser der Grundfläche r, und dessen Höhe h be-

zeichnet =

$$\frac{\pi}{2} h \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right) = 1,570796. h \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$

Einer Kugelzone, deren Halbmesser der Grundflächen R und r , und deren Höhe h bezeichnet,

$$= \frac{\pi}{2} h \left(R^2 + r^2 + \frac{h^2}{3} \right) = 1,570796. h$$

$$\left(R^2 + r^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$

Bei dem absoluten Gewichte eines Körpers von P lb ist der Kubikinhalt $K = \frac{P}{s}$, wobei s das eigenthümliche Gewicht, oder die Dichtigkeit multipliziert mit 54 bezeichnet.

Das absolute Gewicht $P = K s$.

Das eigenthümliche Gewicht $s = \frac{P}{K}$.

Sind P und p z. B. die Gewichte zweier Kugeln von gleicher Dichtigkeit, K und k ihre Kubikinhalte, A und a die Durchmesser derselben, so verhält sich

$$P : p = K : k = A^3 : a^3$$

d. h. die Gewichte oder die Kubikinhalte der Kugeln von gleicher Dichtigkeit verhalten sich wie die Kubi ihrer Durchmesser, oder überhaupt ihrer gleichnamigen Maasse.

Berechnung der Kugelhaufen:

(Fig. IX.) Dreiseitige Piramide, deren Seite = n Kugeln =

$$\frac{n (n + 1) (n + 2)}{6}$$

(Fig. X.) Vierseitige Piramide, deren Seite = n Kugeln =

$$\frac{n (n + 1) (2 n + 1)}{6}$$

(Fig. XI.) Länglicht viereckiger Haufen, dessen lange Seite = a Kugeln, und dessen kurze Seite = n Kugeln

$$= \frac{n (n + 1) (3 a + 1 - n)}{6}$$

Bestimmungen über die Lage des Schwerpunkts.

Beim Umfang und der Fläche eines regelmässigen Vielecks: im Mittelpunkte.

Beim Dreieck: um $\frac{2}{3}$ von der Spitze, in der die gegenüberliegende Seite halbirenden Linie.

Beim Parallelogramm: im Durchschnittspunkt beider Diagonalen.

Beim Trapez: in der Halbirungslinie c, der zwei parallelen Seiten a und b, von der Seite b

um $\frac{c}{3} \left(\frac{b + 2 a}{a + b} \right)$ abstehend.

Bei einer parabolischen Fläche: in der Achse um $\frac{3}{5}$ vom Scheitel entfernt.

Bei einem Kreisabschnitt: um den $\frac{2}{3}$ fachen Kubus der halben Sehne, getheilt durch die Fläche vom Mittelpunkte ab.

Bei einem Prisma, einem vollen oder konzentrisch hohlen Cylinder mit parallelen Grundflächen: in der Mitte der Achse.

Bei der Piramide oder dem Kegel: um $\frac{1}{4}$ der Achse von der Grundfläche.

Bei einem parallel abgeschnittenen Kegel: von der Mitte der Achse gegen die grössere Grundfläche um $\frac{\frac{1}{4} h (R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 + R r}$;

und wenn dieser cylindrisch und konzentrisch ausgehöhlt ist, wie z. B. bei Kanonenröhren: um

$$\frac{\frac{1}{4} h (R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 + R r - 3 a^2}$$

wobei h die Achse, R der Halbmesser der grösseren, r der Halbmesser der kleineren Kegelfläche a der Halbmesser des Cylinders bezeichnet.

Bei einem Kugelabschnitt wobei r der Halbmesser der Kugel, x die Höhe des Abschnittes bezeichnet: um $\frac{r x - \frac{1}{4} x^2}{3 r - x}$ von der Grundfläche aufwärts. —

Bei einer Halbkugel: um $\frac{3 r}{8}$ vom Mittelpunkt ab. —

Wenn bei einem System von Körpern, die Schwerpunkte der einzelnen Körper in einer geraden Linie liegen, so ist der Abstand ihres gemeinschaftlichen Schwerpunkts von einem Punkte dieser Geraden, gleich der Summe der Momente in

Bezug dieses Punktes, dividirt durch die Summe der Gewichte.

Das statische Moment ist das Gewicht des Körpers, multipliziert mit dem Abstand seines Schwerpunktes von einem Punkte, einer Linie oder einer Fläche.

Bei der Berechnung der Momente gleichartiger Körper kann man Statt der Gewichte die Kubikinhalte setzen.

Wenn daher Σy die Summe der statischen Momente, Σk die Summe der Kubikinhalte bezeichnet, so ist x oder der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunkts =

$$\frac{\Sigma y}{\Sigma k}$$

Trigonometrische Auflösung der Dreiecke.

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{A \sin c}{2} \quad (\text{Fig. XII.})$$

Gegeb. Stücke.	Formeln für die zu suchenden Stücke und den Halbmesser r .
B	$C = \frac{B \sin c}{\sin b}$
C	$A = \frac{B \sin a}{\sin b}$
a	für $a = 90^\circ$ ist auch $C = \frac{B \tan c}{r}$

Gegeb. Stücke. Formeln für die zu suchenden Stücke und den Halbmesser r.

B	$\sin b = \frac{B \sin a}{A}$, $b >$ oder $< 90^\circ$, wenn
A	$A < B$.
a	$C = \frac{A \sin c}{\sin a}$ oder $\frac{B \sin c}{\sin b}$
	für $a = 90^\circ$ ist auch
	$C = \frac{B \tan c}{r}$.
A > C	$\tan\left(\frac{a-c}{2}\right) = \frac{(A-C) \cot \frac{1}{2} b}{A+C}$ oder
C	$\cot\left(\frac{a-c}{2}\right) = \frac{(A+C) \tan \frac{1}{2} b}{A-C}$
b	$\frac{180^\circ - b}{2} + \frac{a-c}{2} = a$
	$B = \frac{C \sin b}{\sin c}$ oder $\frac{A \sin b}{\sin a}$.
	für $b = 90^\circ$ ist auch
	$\tan a = \frac{A r}{C}$ oder $\tan c = \frac{C r}{A}$.
A	$\cos a = \frac{r (B^2 + C^2 - A^2)}{2 B C}$ oder
B	$\sin \frac{1}{2} a = \frac{r}{2} \sqrt{\left(\frac{A+B-C}{B}\right) \left(\frac{A+C-B}{C}\right)}$
C	oder
	$\cos \frac{1}{2} a = \frac{r}{2} \sqrt{\left(\frac{B+C-A}{B}\right) \left(\frac{B+C+A}{C}\right)}$
	$\sin c = \frac{C \sin a}{A}$ oder $\sin b = \frac{B \sin a}{A}$.

Praktisches Messen.

A B zu bestimmen, wenn bloss die Punkte A und B zugänglich sind (Fig. XIII): man messe von C aus A C und B C, mache $a C = \frac{A C}{n}$ und $b C = \frac{B C}{n}$, messe a b, so ist $A B = n. a b$.

A B zu bestimmen, wenn bloss B zugänglich ist (Fig. XIV.): man gehe von B rechtwinklicht ab nach C und messe B C; verlängere B C und mache $C a = \frac{B C}{n}$, gehe von a ebenfalls rechtwinklicht ab nach b, bezeichne den in der Richtung von A und C sich befindenden Punkt b, messe a b, so ist $A B = n. a b$.

A B zu bestimmen, wenn die ganze Linie unzugänglich ist (Fig. XV.): man messe die Standlinie C D und die Winkel o, p, q und r, so ist $\angle n = 180^\circ - (p + q + r)$ und deshalb

$$\sin n : C D = \sin (q + r) : B C$$

Ferner ist $\angle m = 180^\circ - (o + p + q)$ also

$$\sin m : C D = \sin q : A C$$

und bestimme aus diesen Proportionen B C und

A C, mache von C aus $a C = \frac{1}{n} A C$ und $b C = \frac{1}{n} B C$, messe a b, so ist $A B = n. a b$.

Den unzugängigen Winkel C zu halbiren (Fig. XVI.): man verlängere A C und B C, messe D E und die Winkel o und p, so ist $\angle q$

$= 180^\circ - (o + p)$ und desshalb

$$\sin(o + p) : D E = \sin o : C D.$$

und $\sin o : C D = \sin p : C E.$

und bestimme aus diesen Proportionen $C D$ und $C E.$ Ferner suche man mittelst der Proportion:

$$D F : C D = D E : C D + C E$$

weil

$$D F : C D = \frac{1}{2} \sin(o + p) : \sin C F D$$

$$E F : C E = \frac{1}{2} \sin(o + p) : \sin C F E$$

somit

$$D F : C D = D F + E F : C D + C E$$

oder

$$D F : C D = D E : C D + C E$$

sich verhält, den Werth von

$$D F = \frac{C D \cdot D E}{C D + C E},$$

trage diesen von D auf der Linie $D E$ auf, so giebt der Durchschnittspunkt in F mit C verbunden, die verlangte Theilung des Winkels.

Die zugängige Höhe $a b$ zu messen (Fig. XVII.): man messe $A C$, mache $a C = \frac{1}{n} A C$, stelle in $a b$ einen Stab senkrecht auf, visire von C nach B , so ist $A B = n. a b.$

Wenn die Höhe unzugängig ist (Fig. XVIII.): man verlängere rückwärts von C die Linie $A C$, messe $C D$ und den Winkel p , so ist

$\angle o = 180^\circ - n$, und $\angle m = 180^\circ - (o + p)$
also $\sin m : C D = \sin p : B C.$

Ferner ist

$$B C : A B = \text{Rad} : \sin (m + p)$$

und $A B = B C \cdot \sin (m + p)$.

Auf einem Punkt einer Geraden eine Senkrechte zu errichten (Fig. XIX.):

$$B C^2 = A B^2 + A C^2$$

$$B C = \sqrt{A B^2 + A C^2}.$$

Man mache

$B C =$	5	13	17	25
$A C =$	4	12	15	24
$A B =$	3	5	8	7

Einen Winkel von 45° abzustecken (Fig. XX): man errichte in A eine Senkrechte, mache $A B = A C$, so wird Winkel B und C jeder $= 45^\circ$. —

Einen Winkel von 60° abzustecken (Fig. XXI.): man mache die drei Seiten des Dreiecks von gleicher Länge, so wird Winkel

$$C = \frac{180}{3} = 60^\circ.$$

Einen Winkel von 90° abzustecken (Fig. XXII.): man errichte in D eine Senkrechte, mache $A D = B D = C D$, so wird Winkel C $= 90^\circ$.

Einen Winkel von 100° abzustecken (Fig. XXIII.): wenn sich die Seiten des Dreiecks A B, B C und A C wie 10 : 7 : 6 verhalten, so wird Winkel C $= 100^\circ$.

Einen Winkel von 108° abzustecken (Fig. XXIV.): wenn sich die Seiten des Dreiecks A B, B C und A C, wie 9 : 7 : 4 verhalten, so wird Winkel C = 108° .

Einen Winkel von 120° abzustecken (Fig. XXV.): man errichte in D eine Senkrechte, mache $C D = C F = C E$, ferner $C D = D E = D F$, so wird Winkel C = 120° . —

Pendel.

Die Zeit eines Pendelschlages in einem sehr kleinen Bogen

$$t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}},$$

wobei a die Länge des einfachen Pendels, und g die Endgeschwindigkeit bezeichnet.

Länge des einfachen Sekundenpendels = 3,3123 Schweizerfuss.

Geschwindigkeit des Schalles.

Die Geschwindigkeit des Schalles beträgt in einer Sekunde bei 0° Réaumur = 1110 Schweizerfuss = 444 Artillerieschritte. Für jeden Grad mehr oder weniger, wird sie um 2,5 Fuss oder einen Schritt grösser oder kleiner. —

Zur Ausmittlung der Entfernung feuernder Geschütze, deren Aufblitzen man beobachten kann,

werden die Pulsschläge zwischen Blitz und Knall gezählt, und mit 370 multipliziert, um Artillerieschritte zu erhalten. Auf die Minute sind 72 Pulsschläge gerechnet.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

	Pag.
Von der Bewegung der Körper im Allgemeinen .	7

Zweiter Abschnitt.

Von der Flugbahn der Geschosse im Allgemeinen .	21
---	----

Dritter Abschnitt.

Von der Flugbahn der Geschosse im luftleeren Raume	28
--	----

Vierter Abschnitt.

Von der Flugbahn der Geschosse im luftgefüllten Raume	47
---	----

Anhang verschiedener Notizen.

A. Schweizerische Masse und Gewichte.

Längenmasse	62
Flächenmasse	63
Kubische Masse	63
Hohlmasse für trockene Früchte	63
Hohlmasse für Flüssigkeiten	63
Gewichte	63

B. Dichtigkeit der Körper

	64
--	----

C. Mathematische Formeln.

Längenmessung	65
Flächeninhalte	66
Oberflächen	67
Kubikinhalt	68
Bestimmungen über die Lage des Schwerpunktes	70
Trigonometrische Auflösung der Dreiecke . .	72
Praktisches Messen	74
Pendel	77
Geschwindigkeit des Schalles	77

Verbesserungen.

Seite 19 in der 5. Zeile von unten lies: Parallelo-
gramms.

» 32 in der 11. » von oben lies:

$$x : x' = g \sin 2 \vartheta : g \sin 2 \vartheta' =$$

$$x : x' = \sin 2 \vartheta : \sin 2 \vartheta'.$$

» 35 in der 11. Zeile von oben lies:

$$\frac{\angle b a c}{2} \text{ und } 90^\circ - \frac{\angle b a c}{2}, \text{ oder u. s. w.}$$

» 42 in der 11 Zeile von oben lies: man.

» 56 in der 5 » von oben lies: so.

Fig. 5.

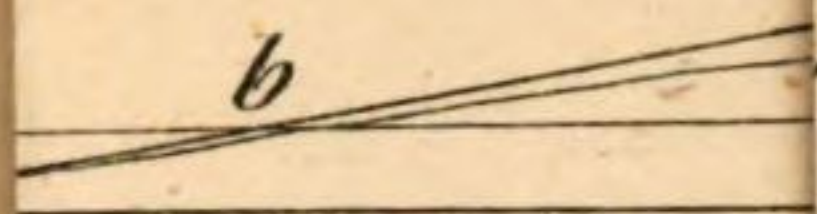


Fig. 14.

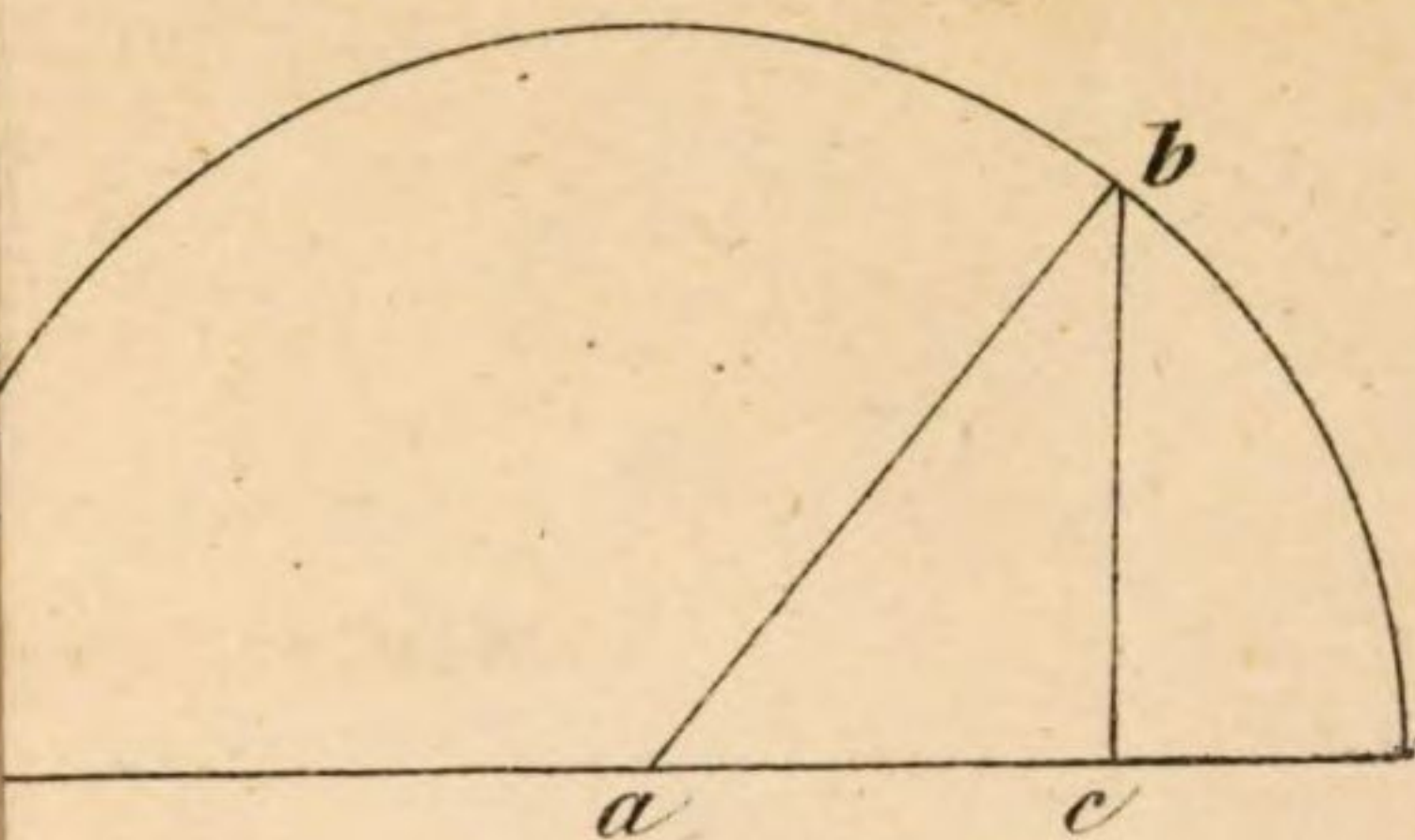


Fig. 8.

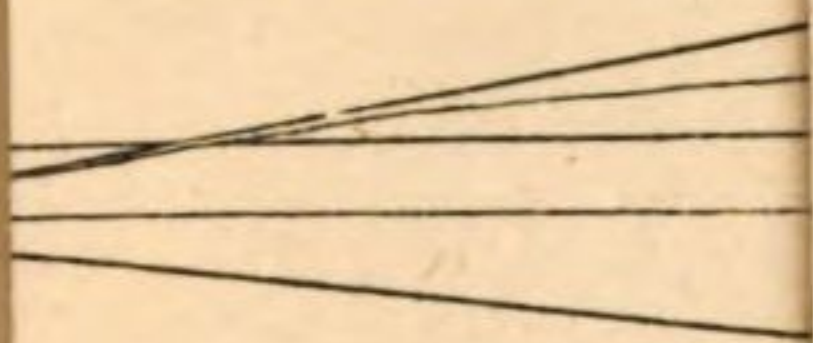


Fig. 11.

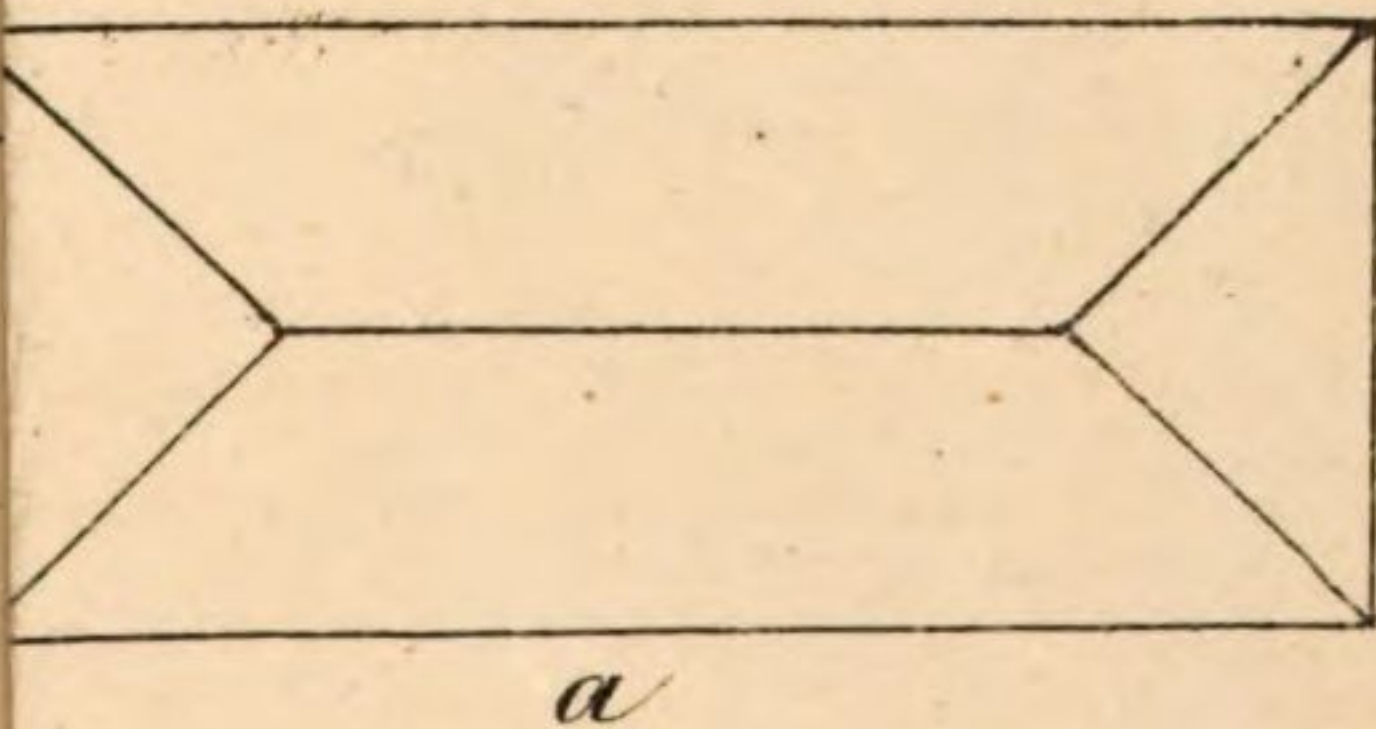


Fig. 7.

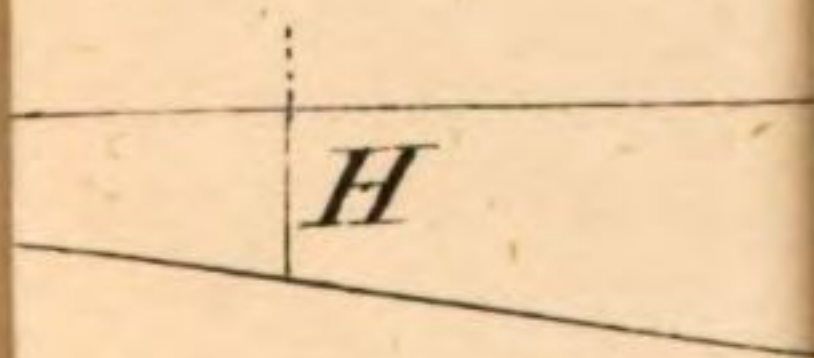


Fig. 12.

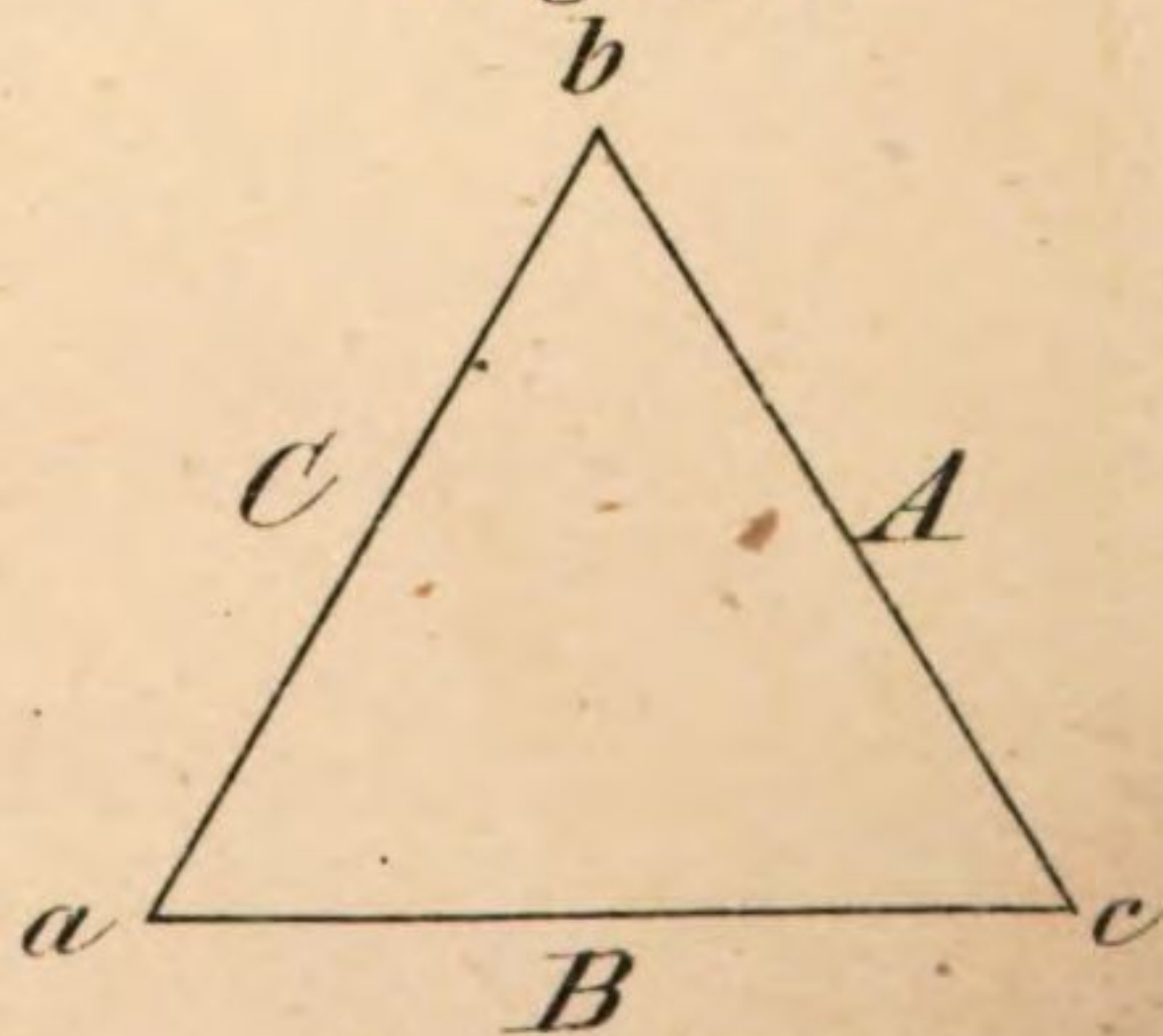
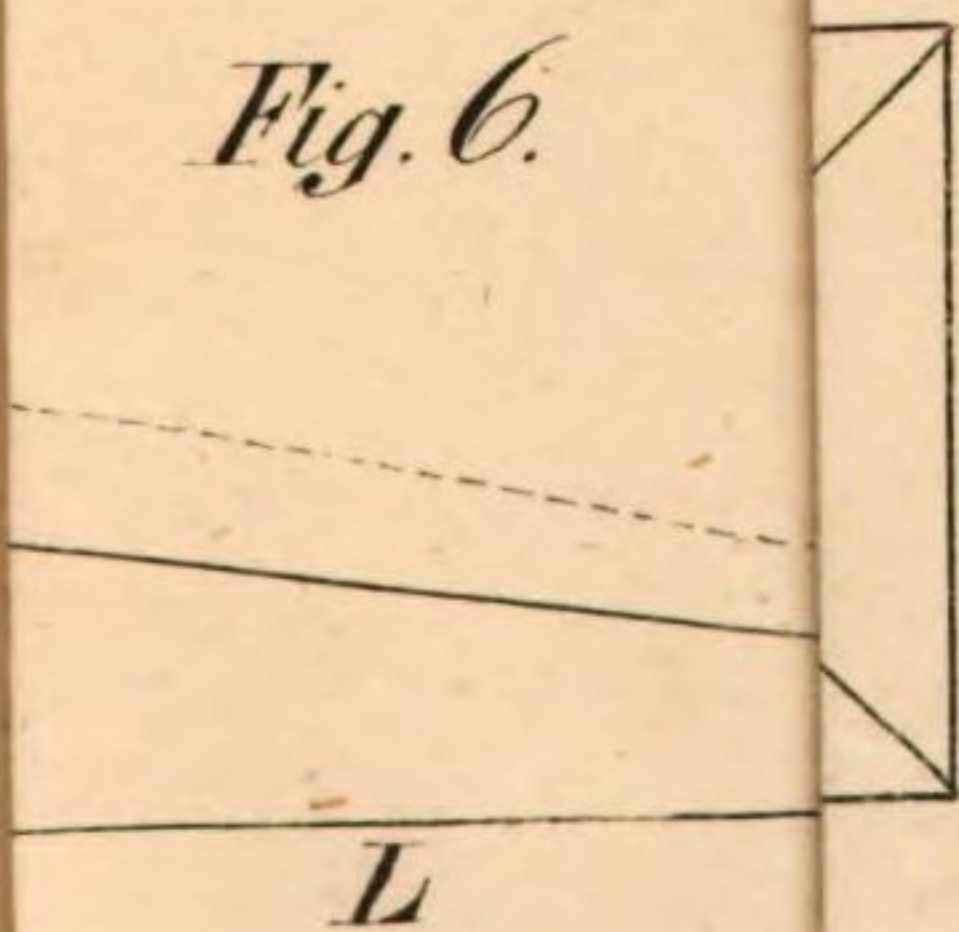
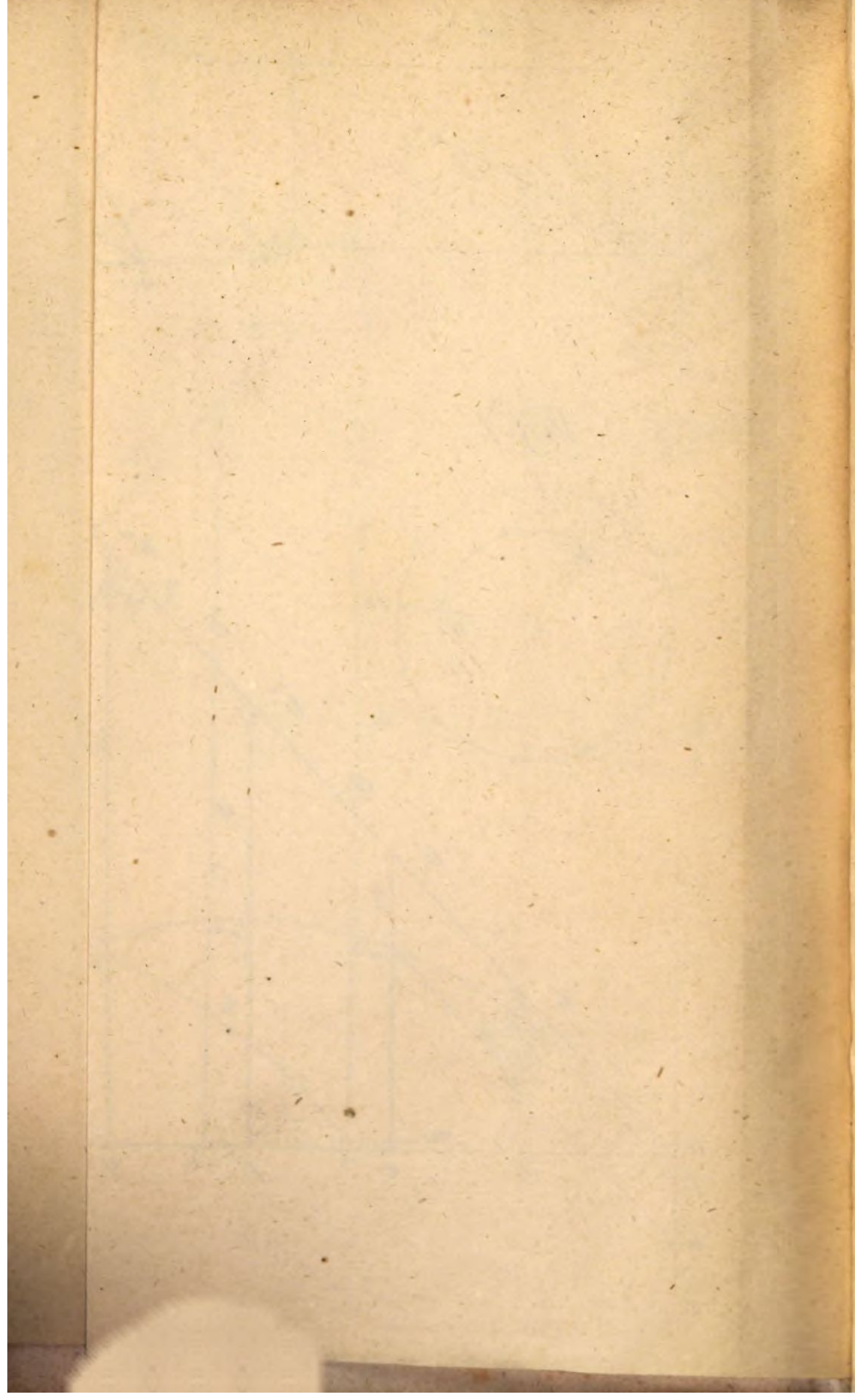
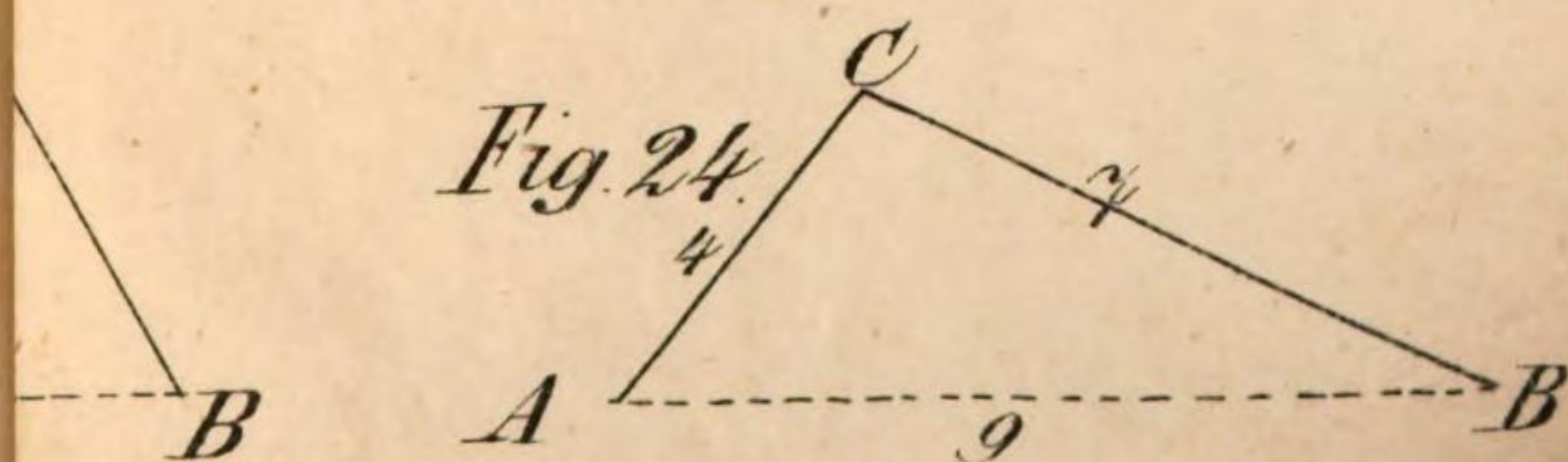
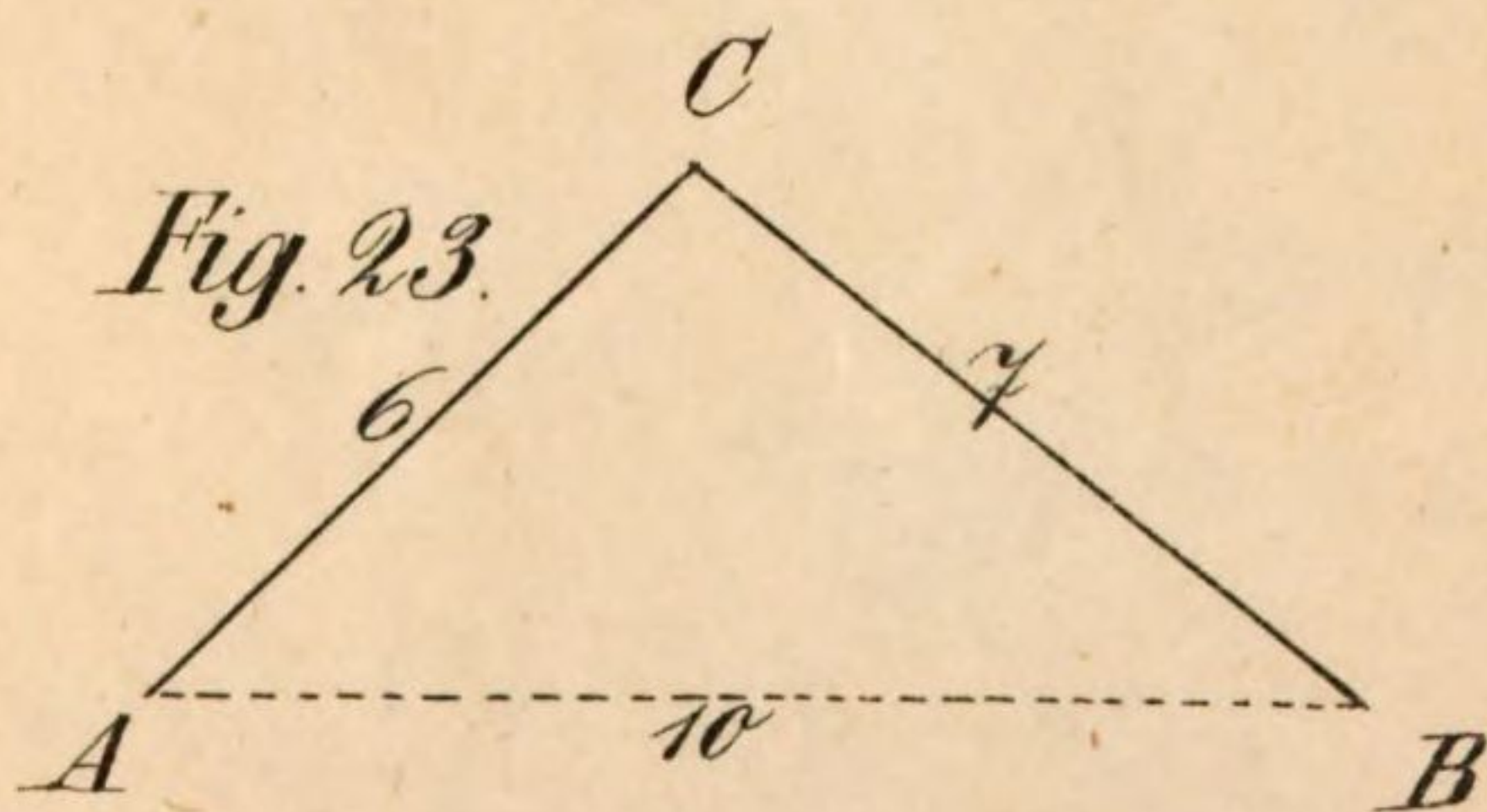
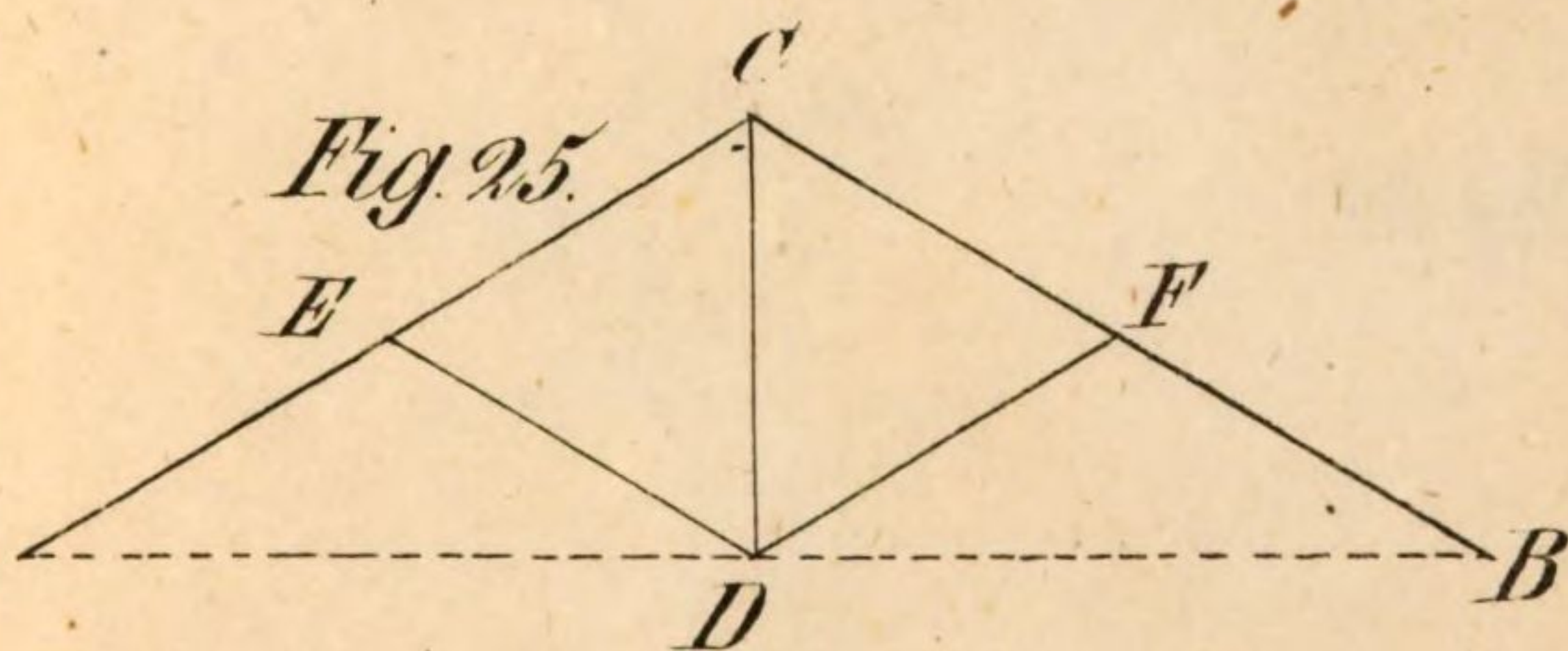
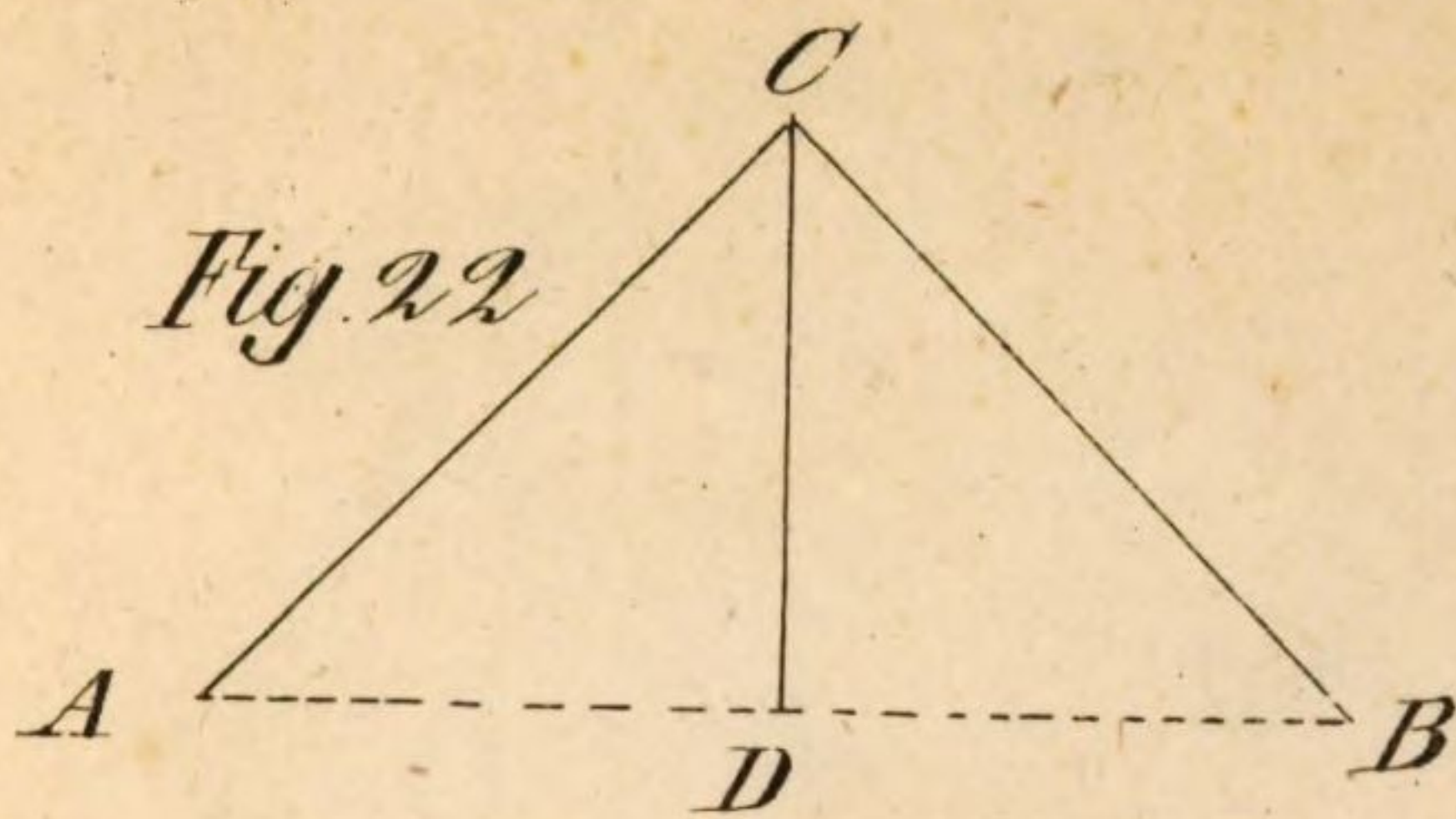
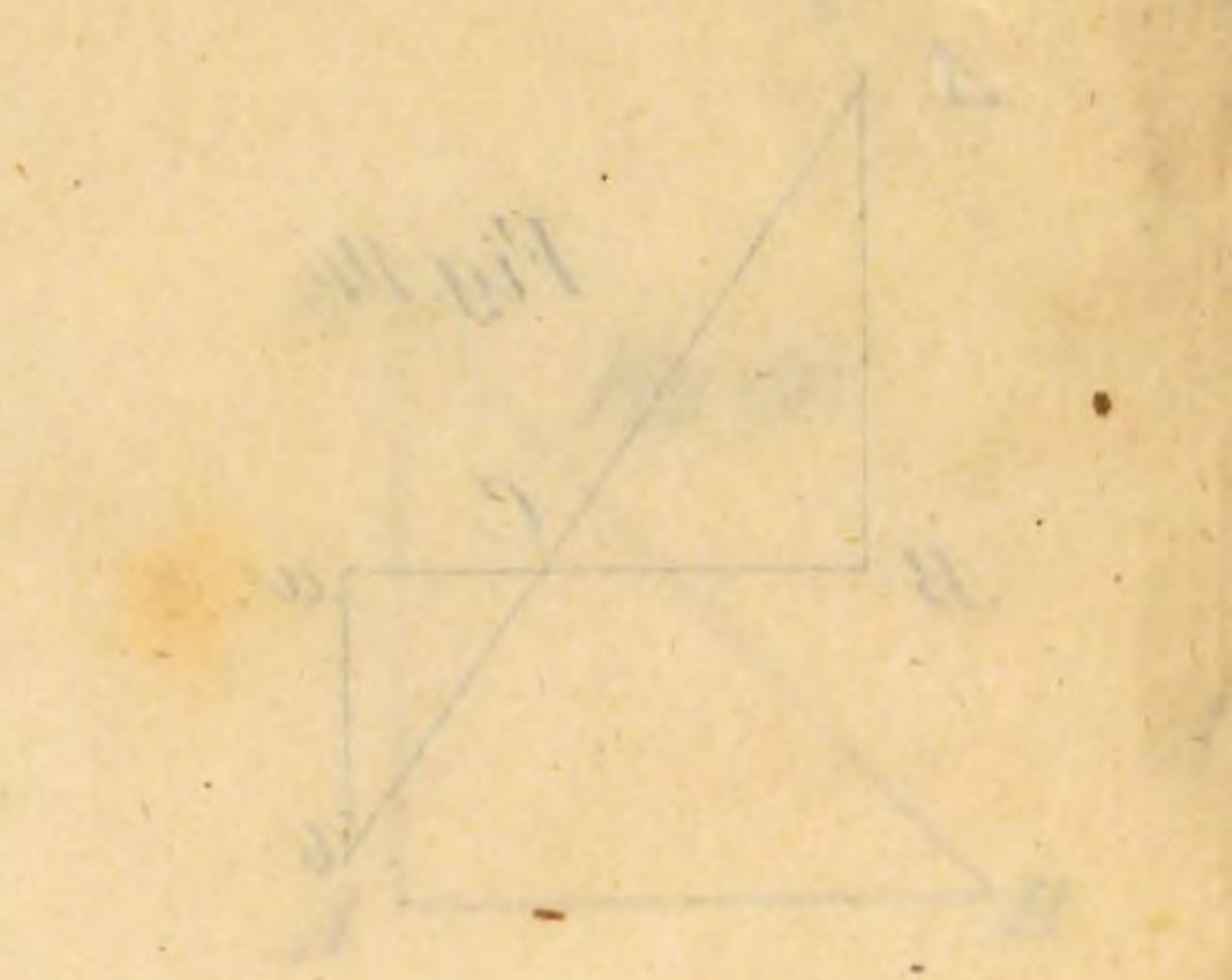
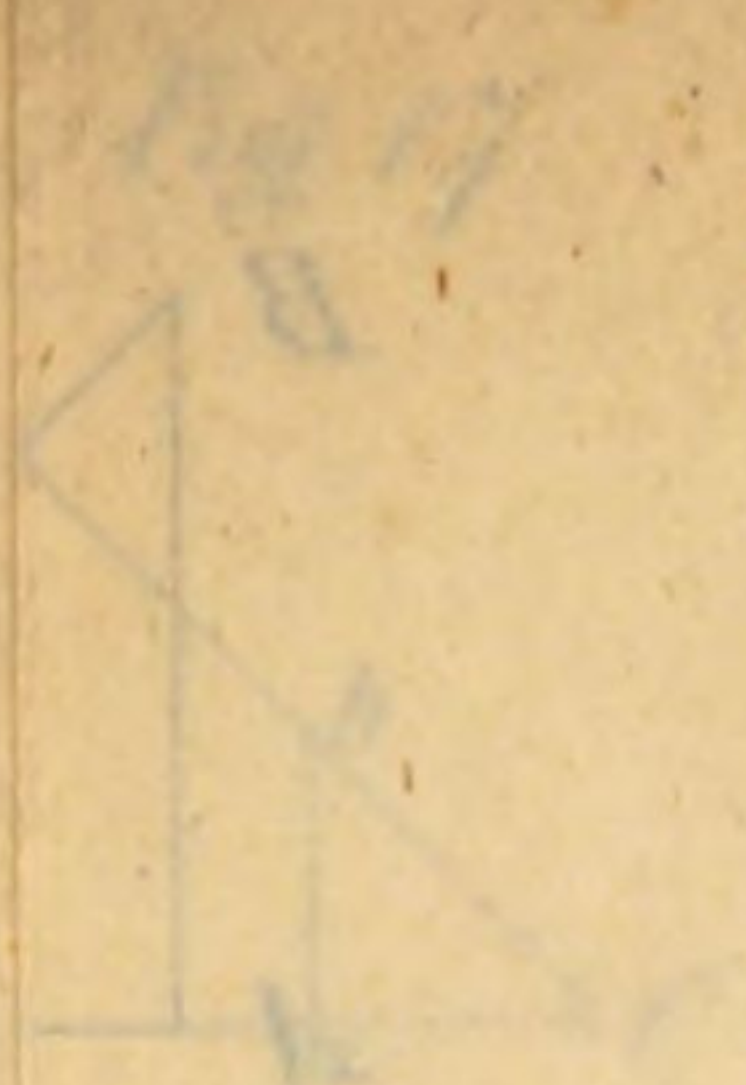


Fig. 6.









In allen Buchhandlungen ist zu haben :

G. H. Düsour
Lehrbuch der Taktik
für
Offiziere aller Waffen.

Aus dem Französischen

von

M. G. v. Tscharner.

Mit 21 lith. Tafeln. gr. 8. broschirt.
2 Rthlr. oder 3 fl. R. W.

Dieses für jeden Offizier unentbehrliche Handbuch, das sich durch Klarheit und Vollständigkeit vor vielen ähnlichen auszeichnet, ist nun vollständig erschienen.

Um die Anschaffung zu erleichtern, kann es auch in 3 Lieferungen à 16 Gr. oder 1 fl. bezogen werden.

Die Verleger

Orell, Füßli & Comp. in Zürich.

Denzler, Ludwig

Theoretische Abhandlung über die Flugbahn der Geschosse nebst einem Anhang,
enthaltend verschiedene dem Artillierioffizier untentbehrliche
mathematische Notizen

Zürich 1845

App.mil. 31 h

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10255835-2